Спецкурс «Введение в механику сплошной среды и вычислительную газовую динамику»

Лекция 2.1

Линейное уравнение переноса

Лекция 2.2

Система гиперболических уравнений

Абалакин Илья Владимирович

18 марта 2025 года

В предыдущих лекциях была получена система уравнений, которое при эйлеровом подходе можно записать как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$
$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \nabla p = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot E\mathbf{u} + \nabla \cdot p\mathbf{u} = 0$$

$$\xRightarrow{(A.14),(A.15)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$
$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \rho \mathbf{u}}_{\mathbf{u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}\right) = 0} + \nabla p = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E + E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot p\mathbf{u} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ &\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E = -E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot p\mathbf{u} \end{aligned}$$

Упрощение 1

При предположении $\nabla p = 0$ (**не физичным!!!**) и $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

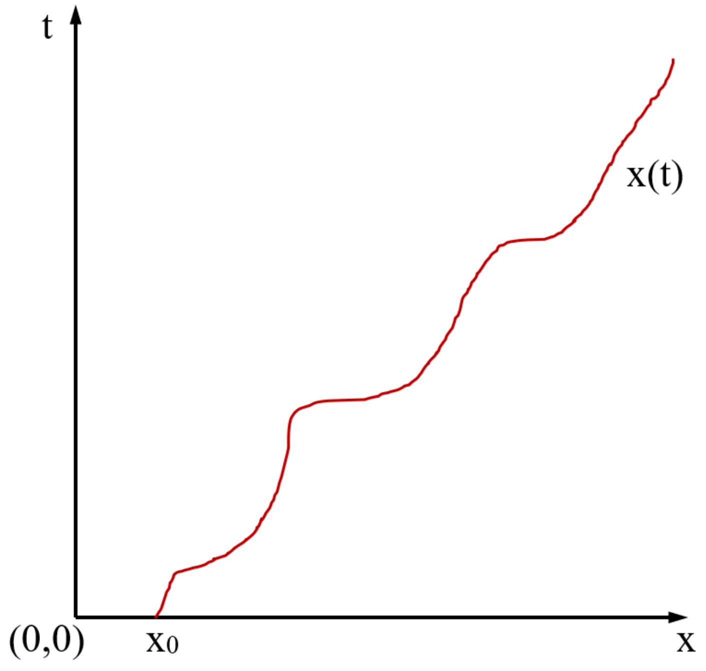
система уравнений Эйлера преобразуется в систему переноса скалярных и векторной величин.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \qquad (1)$$

Уравнение переноса, характеристики

Упрощение 2. Будем предполагать, что скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

Пусть в пространстве переменных $(\mathbf{x}, t)$ — фазовом пространстве задана кривая в параметрической форме



$$\mathbf{x}(t):\begin{cases}\mathbf{x} = \mathbf{x}(s),\\ t = s.\end{cases}$$

Определим производную функции $f(\mathbf{x}, t)$ вдоль кривой $\mathbf{x}(t)$

$$\frac{d}{ds} f(\mathbf{x}(s), s) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot \nabla f \qquad (2)$$

Сопоставим уравнение (1) $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla f = 0$ и производную (2):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla f = 0 \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ функция $f(\mathbf{x}, t)$ постоянна вдоль кривой $\mathbf{x}(t)$: $f(\mathbf{x}_s, t_s) = f(\mathbf{x}_0, 0)$, где точки $(\mathbf{x}_0, 0), (\mathbf{x}_s, t_s) \in \mathbf{x}(s)$

Кривая $\mathbf{x}(t)$ называется ***характеристикой*** уравнения (1) и определяется уравнением (УХ): $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}$ (4)

Упрощение 3. Пусть скорость $\mathbf{u}$ постоянна.

Пусть $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, тогда решение УХ (4) есть ***прямые*** в фазовом пространстве $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}t$.

Пусть $f(\mathbf{x}(0), 0) = g(\mathbf{x}_0)$, тогда решение уравнения (3) — $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}_0)$ или $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$.

Упрощение 4. Будем рассматривать одномерное по пространству уравнение со скоростью $u > 0$.

Начальная задача

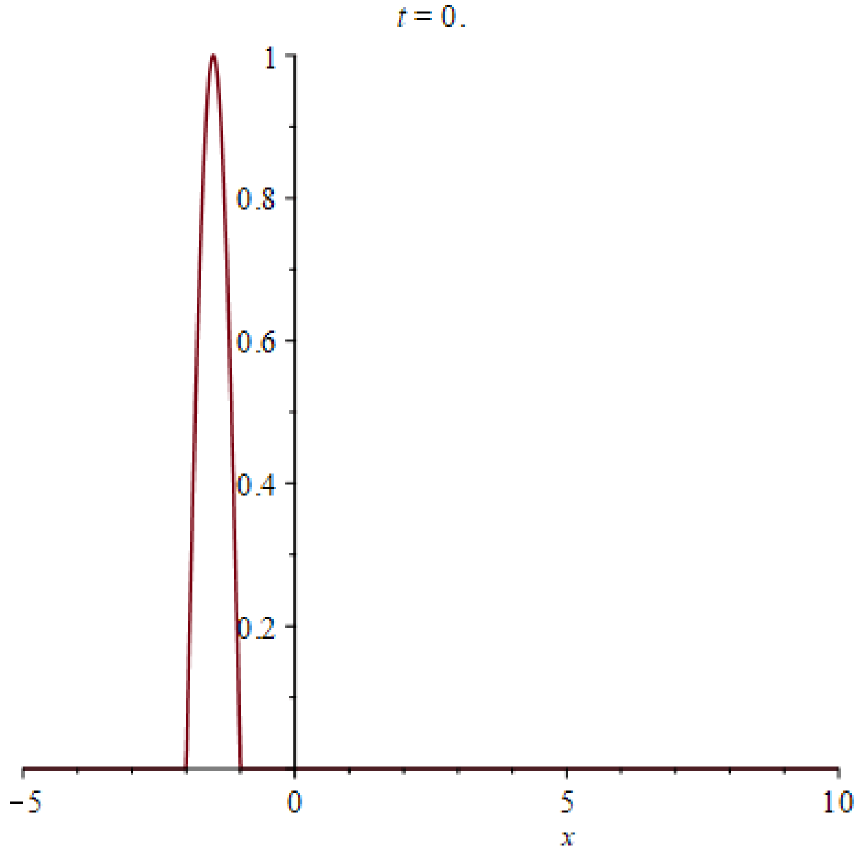
Начальная задача для линейного уравнения переноса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ f(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

имеет решение $f(x,t) = g(x - ut)$, которое постоянно вдоль характеристик $x = ut + x_0$.

Пример:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \sin(\pi x) & -2 \le x \le -1, \quad u = 2 \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$



Иногда заменяют задачу без граничных условий на задачу, определённую на отрезке $x_0 \le x \le x_1$
с периодическими граничными условиями: $f(x_0,t) = f(x_1,t)$

При этом предполагается периодическое продолжение начальной функции g(x), определённой на отрезке, на всю числовую ось.

Начально-краевая задача (1)

Для уравнения линейного переноса с $u > 0$ можно поставить краевую задачу. Очевидно, что краевое условие ставится на левой границе так как волна распространяется слева направо. Для определённости пусть левая граница определена в точке $x = 0$ и граничное условие задаётся функцией $f(0,t) = \mu(t), \quad t > 0.$

Задача 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ f(x,0) = g(x), & x > 0 \\ f(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Решение:

Доопределим $g(x) = 0$ при $x \le 0$. Тогда $f(x,t) = g(x - ut)$ при положительном аргументе функции $g(z)$, то есть при $x - ut > 0$. При неположительном аргументе $x - ut \le 0$ функция $f(x,t) = 0$.

Так как $g(x-ut)\big|_{x=0} = g(-ut) = 0$, то граничное условие выполнено.

Таким образом, решение **Задачи 1** имеет вид: $f(x,t) = \begin{cases} 0, & t > x/u \\ g(x-ut), & t < x/u \end{cases}$

Задача 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ f(x,0) = 0, & x > 0 \\ f(0,t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

Решение:

Очевидно, что решение представимо в виде $f(x,t) = s(x - ut)$. Из граничного условия следует $f(0,t) = s(-ut) = \mu(t)$. Откуда вытекает вид функции $\underline{s}(z) = \mu(-z/u)$. Тогда $f(x,t) = s(-(x - ut)/u) = \mu(t - x/u)$. Доопределим $\mu(t) = 0$ при $t \le 0$. Тогда $f(x,t) = \mu(t - x/u)$ при положительном аргументе функции $\mu(t)$, то есть при $t - x/u > 0$ и $f(x,t) = 0$ при неположительном аргументе $t - x/u \le 0$. Так как $x > 0$ и $\mu(t-x/u)\big|_{t=0} = \mu(-x/u) = 0$, то есть начальное условие выполнено.

Таким образом, решение **Задачи 2** представимо в виде $f(x,t) = \begin{cases} \mu(t-x/u), & t > x/u \\ 0, & t < x/u \end{cases}$

Начально-краевая задача (2)

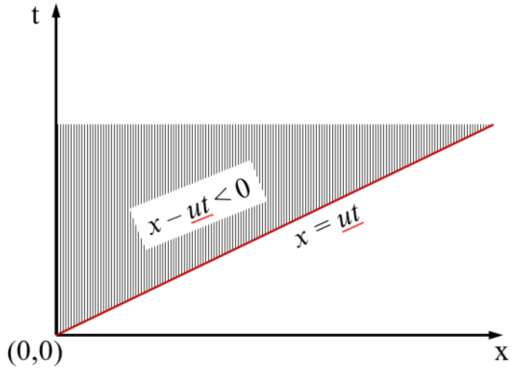
Задача 3:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ f(x,0) = g(x), & x > 0 \\ f(0,t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

Решение:

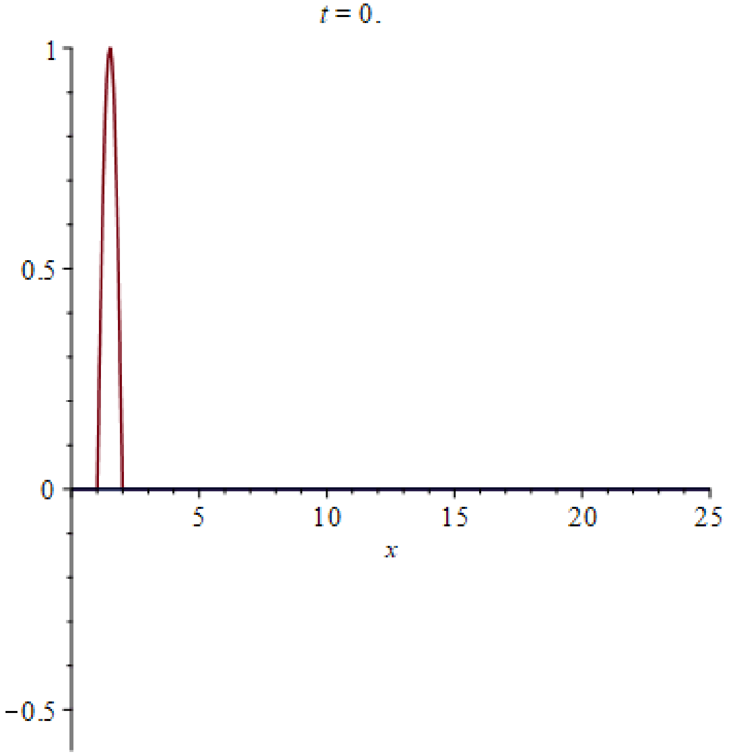
В силу линейности уравнение решение **Задачи 3** есть суперпозиция решений **задач 1 и 2.**

$$f(x,t) = \begin{cases} \mu(t - x/u), & t > x/u \\ g(x - ut), & t < x/u \end{cases}$$



Пример:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\sin(\pi x) & 1 \le x \le 2, \\ 0 & x > 2 \end{cases} \quad \mu(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{10}\right)\right)\cos(\pi t), \quad u = 2$$



Начально-краевая задача в случае u < 0

Рассмотрим случай уравнения переноса со скоростью u < 0

1. Решением будет волна, распространяющееся справа налево $g(x + ut)$ и решение не меняется вдоль характеристик $x = -ut + x_0$.
2. В случае краевой задачи на полуограниченной прямой $x \le x_R$, то, очевидно, что граничное условие задаётся на правой границе x_R, так как волна движется справа налево.

Аналогично приведённым выше выкладкам начально-краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & x < x_R, \quad t > 0 \\ f(x,0) = g(x), & x < x_R \\ f(x_R,t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

имеет следующее решение

$$f(x,t) = \begin{cases} \mu(t + x/u), & t > -\dfrac{x - x_R}{u} \\ g(x+ut), & t < -\dfrac{x - x_R}{u} \end{cases}$$

Волновое уравнение: $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

Система 1D линейных уравнений (1)

Пусть задана матрица **A** размером $n \times n$

Определение 1. Собственными значениями $\lambda_i,\ i = 1,\ldots,n$ матрицы **A** являются корни характеристического многочлена

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Определение 2. Правый собственный вектор матрицы **A**, соответствующий собственному значению λ_i матрицы **A** есть вектор $\mathbf{r}_i = (r_{1i},\ldots,r_{ni})^T$, для которого

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i.$$

Определение 3. Левый собственный вектор матрицы **A**, соответствующий собственному значению λ_i матрицы **A** есть вектор $\boldsymbol{l}_i^T = (l_{i1},\ldots,l_{in})$, для которого

$$\boldsymbol{l}_i^T\mathbf{A} = \lambda_i\boldsymbol{l}_i^T.$$

Система 1D линейных уравнений (2)

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) *первого* порядка с *постоянными* коэффициентами

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

Здесь

- вектор $\mathbf{U} = \left(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)\right)^T$ есть вектор неизвестных, являющейся решением системы
- матрица коэффициентов $\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\}$ — постоянна, то есть $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = 0$ и не зависит от решения $\mathbf{U}(x,t) \Rightarrow$ ***система линейная***

Определение 3 (**гиперболическая система**). Система (1) называется гиперболической, если матрица **A** имеет n ***вещественных*** собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ и соответствующий набор из n ***линейно независимых*** правых собственных векторов $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n$. Система называется ***строго*** гиперболической, если все собственные значения λ_i **различны**.

В дальнейшем будем полагать $n = 3$

Система 1D линейных уравнений (3)

Утверждение 1. Матрица $\mathbf{A}$ гиперболической системы диагонализируема, то есть представима в виде $\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$, где $\boldsymbol{\Lambda}$ есть диагональная матрица.

Док-во: Пусть $\mathbf{S} = \left(\mathbf{r}_1 \;\vdots\; \mathbf{r}_2 \;\vdots\; \mathbf{r}_3\right)$, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ — правые собственные вектора. Тогда

$$\mathbf{AS} = \left(\mathbf{A}\mathbf{r}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{r}_2 \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{r}_3\right) = \left(\lambda_1\mathbf{r}_1 \;\vdots\; \lambda_2\mathbf{r}_2 \;\vdots\; \lambda_2\mathbf{r}_3\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 r_{11} & \lambda_2 r_{12} & \lambda_3 r_{13} \\ \lambda_1 r_{21} & \lambda_2 r_{22} & \lambda_3 r_{23} \\ \lambda_1 r_{31} & \lambda_2 r_{32} & \lambda_3 r_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{r}_1 \;\vdots\; \mathbf{r}_2 \;\vdots\; \mathbf{r}_3\right)\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda} \qquad (2)$$

Так как $\mathbf{r}_i$ линейны независимы, то $\det\mathbf{S} \neq 0$, следовательно существует $\mathbf{S}^{-1}$. Домножим (2) на $\mathbf{S}^{-1}$ слева

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \text{ или } \mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}. \ \blacklozenge \qquad (3)$$

Система 1D линейных уравнений (4)

Утверждение 2. Строки матрицы $\mathbf{S}^{-1}$ есть левые собственные вектора $\mathbf{A}$.

Док-во: Пусть $\mathbf{s}_i^T$ — вектор-строка матрицы $\mathbf{S}^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \hdashline \mathbf{s}_2^T \\ \hdashline \mathbf{s}_3^T \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T\mathbf{A} \\ \hdashline \mathbf{s}_2^T\mathbf{A} \\ \hdashline \mathbf{s}_3^T\mathbf{A} \end{pmatrix}$$

[redacted] $\boldsymbol{l}_i^T$.

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_{11} & \lambda_2 s_{12} & \lambda_3 s_{13} \\ \hdashline \lambda_2 s_{21} & \lambda_2 s_{22} & \lambda_2 s_{23} \\ \hdashline \lambda_3 s_{31} & \lambda_3 s_{32} & \lambda_3 s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{s}_1^T \\ \hdashline \lambda_2 \mathbf{s}_2^T \\ \hdashline \lambda_3 \mathbf{s}_3^T \end{pmatrix}$$

Система 1D линейных уравнений (5)

Замечание 1. Из тождества $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{I}$ следует

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ \hdashline l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ \hdashline s_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \vdots & r_{12} & \vdots & r_{13} \\ r_{21} & \vdots & r_{22} & \vdots & r_{23} \\ r_{31} & \vdots & r_{32} & \vdots & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}_1^T \\ \hdashline \boldsymbol{l}_2^T \\ \hdashline \boldsymbol{l}_3^T \end{pmatrix} \left(\mathbf{r}_1 \ \vdots\ \mathbf{r}_2 \ \vdots\ \mathbf{r}_3 \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}_1^T \cdot \mathbf{r}_1 & \boldsymbol{l}_1^T \cdot \mathbf{r}_2 & \boldsymbol{l}_1^T \cdot \mathbf{r}_3 \\ \boldsymbol{l}_2^T \cdot \mathbf{r}_1 & \boldsymbol{l}_2^T \cdot \mathbf{r}_2 & \boldsymbol{l}_2^T \cdot \mathbf{r}_3 \\ \boldsymbol{l}_3^T \cdot \mathbf{r}_1 & \boldsymbol{l}_3^T \cdot \mathbf{r}_2 & \boldsymbol{l}_3^T \cdot \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, имеем взаимную ортогональность системы правых и левых собственных векторов матрицы **A** (биортогональность)

$$\boldsymbol{l}_i^T \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{ij} \qquad (4)$$

Система 1D линейных уравнений (6)

Замечание 2. Так как система векторов $\mathbf{r}_i$ линейно независима, то она образует базис в пространстве решений системы. Следовательно, для вектора справедливо разложение

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{r}_j,$$

где $\alpha_i = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{l}_i^T$. Действительно, $\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{l}_i^T = \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{r}_j \right) \cdot \boldsymbol{l}_i^T \overset{(9)}{=} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_i$

Система 1D линейных уравнений (7)

Вернёмся к рассмотрению линейной гиперболической системы уравнений (1) — $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0.$

Домножим (1) на матрицу $\mathbf{S}^{-1}$ слева и примем во внимание, что матрица $\mathbf{A}$ диагонализируема

$$\mathbf{S}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{S}^{-1}\underbrace{\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}}_{\mathbf{A}}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Введём переменные $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U} = \left(w_1, w_2, w_3\right)^T$, где $w_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{l}_i^T \cdot \mathbf{U}.$

Тогда (5) запишется в виде

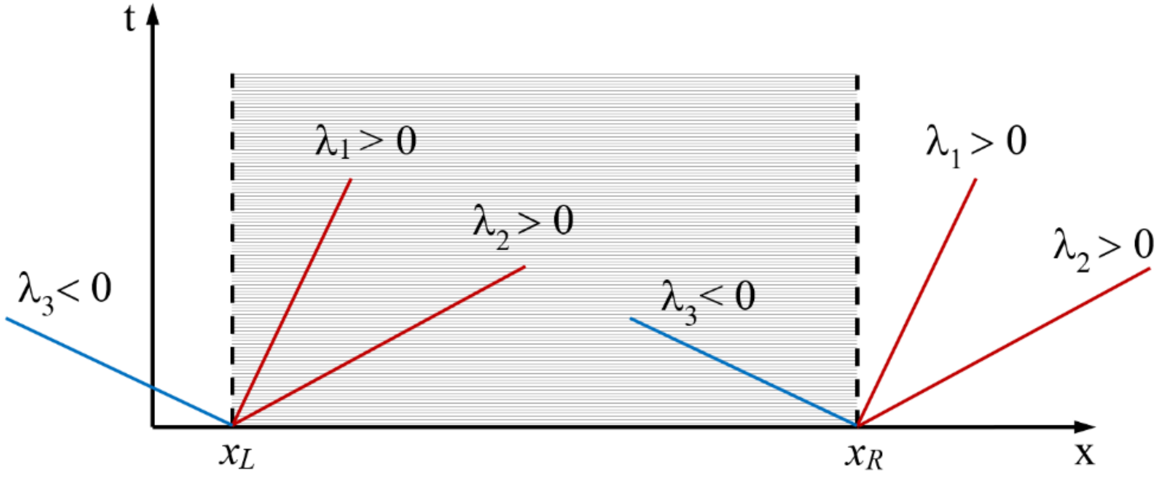
$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Таким образом, система распалась на три независимых уравнения переноса, решение которых известно (Лекция 2.1). Выполняя обратное преобразование $\mathbf{U} = \mathbf{SW}$, получаем решение системы (5).

Система 1D линейных уравнений (8)

1. Система имеет три характеристических направления, определяемых уравнениями $dx/dt = \lambda_i$.
2. Каждая компонента w_i вектора **W** есть волна, распространяющаяся с характеристической скоростью λ_i (поэтому переменные **W** называются ***характеристическими***). А решение **U** есть суперпозиция (линейная комбинация) этих элементарных волн.
3. Запись системы (1) относительно переменных   позволяет определить корректную постановку краевой задачи для системы, решаемой на отрезке $x_L \le x \le x_R$, а, именно, число граничных условий на границе

	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$	**$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$**	**$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$**	**$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$**
$\boldsymbol{x_L}$	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{x_R}$	**3**	**2**	**1**	**0**



Система 1D нелинейных уравнений (1)

Рассмотрим нелинейную систему законов сохранения

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

Почему законы сохранения?

Рассмотрим отрезок $x_L \leq x \leq x_R$ и проинтегрируем (6) по этому отрезку

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{Q}dx = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_R)$$

$\mathbf{Q}(x,t) = \left(q_1(x,t), q_2(x,t), q_3(x,t)\right)^T$ — вектор ***консервативных*** переменных

$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \left(F_1(\mathbf{Q}), F_2(\mathbf{Q}), F_3(\mathbf{Q})\right)^T$ — вектор функции потока

Система 1D нелинейных уравнений (2)

Определение 3 (**матрица Якоби**). Матрица Якоби функции потока определяется следующим образом

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \tag{7}$$

Функция потока $\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}(x,t)\right)$ есть сложная функция аргумента x, следовательно

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}$$

Тогда система (6) перепишется в виде $\dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$

Система 1D нелинейных уравнений (3)

Определение 4 (гиперболическая система). Система (6) называется гиперболической в точке (x,t), если матрица **A** имеет n ***вещественных*** собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ и соответствующий набор из n ***линейно независимых*** правых собственных векторов $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n$. Система называется ***строго*** гиперболической, если все собственные значения λ_i различны.

Важное замечание. Для матрицы системы (7) выполнены **Утверждение 1**, **Утверждение 2 и Замечания 1**, **2**, в которых не учитывается зависимость элементов матрицы от вектора $\mathbf{Q}(x,t)$. В частности, верно, утверждение о диагонализируемости матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q})=\mathbf{S}(\mathbf{Q})\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{Q})\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{Q}),\quad \mathbf{S}(\mathbf{Q})=\left(\mathbf{r}_1(\mathbf{Q})\;\vdots\;\mathbf{r}_2(\mathbf{Q})\;\vdots\;\mathbf{r}_3(\mathbf{Q})\right),\quad \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{Q})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{l}_1^T(\mathbf{Q})\\ \hdashline \boldsymbol{l}_2^T(\mathbf{Q})\\ \hdashline \boldsymbol{l}_2^T(\mathbf{Q})\end{pmatrix}$$

Система 1D нелинейных уравнений (4)

Определение 5 (однородная функция). Функция $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ называется однородной вектор-функцией степени 1, если для любого числа k выполнено равенство

$$\mathbf{F}(k\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} F_1(kq_1, kq_2, kq_3) \\ F_2(kq_1, kq_2, kq_3) \\ F_3(kq_1, kq_2, kq_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kF_1(q_1, q_2, q_3) \\ kF_2(q_1, q_2, q_3) \\ kF_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix} = k\,\mathbf{F}(\mathbf{Q})$$

Теорема Эйлера об однородных функциях. Если $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ однородная вектор-функция степени 1, то выполнено равенство

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_1} q_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial q_2} q_2 + \dfrac{\partial F_1}{\partial q_3} q_3 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial q_1} q_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial q_2} q_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial q_3} q_3 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial q_1} q_1 + \dfrac{\partial F_3}{\partial q_2} q_2 + \dfrac{\partial F_3}{\partial q_3} q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

Из теоремы Эйлера следует следующая цепочка равенств:
$$\underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{Q})\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x}}_{1} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Q})\mathbf{Q}}{\partial x}}_{2}$$

где равенство (1) – дифференцирование сложной функции, равенство (2) – утверждение теоремы Эйлера.

Система 1D нелинейных уравнений (5)

Замена переменных

Пусть компоненты вектора консервативных переменных $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$ есть функция от нового вектора переменных $\mathbf{U}(x,t) = \left(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\right)^T$ таких, что матрица Якоби $\partial\mathbf{Q}(\mathbf{U})/\partial\mathbf{U}$ невырождена в точке (x, t), то есть якобиан $\left|\partial\mathbf{Q}(\mathbf{U})/\partial\mathbf{U}\right| \neq 0.$ Это гарантирует существование обратного отображения с невырожденной матрицей Якоби (теорема об обратной функции).

Введём матрицу Якоби обратного преобразования $\mathbf{P} = \dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{Q}}$, тогда матрица прямого преобразования $\mathbf{P}^{-1} = \dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{U}}$.

Производные вектора $\mathbf{Q}$ преобразуются следующим образом — $\dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} = \dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{U}}\dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{P}^{-1}\dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{P}^{-1}\dfrac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}$

Тогда систему $\dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q})\dfrac{\partial\mathbf{Q}}{\partial x} = 0$ можно записать в новых переменных

$$\mathbf{P}^{-1}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q})\mathbf{P}^{-1}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_U(\mathbf{U})\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A}_U = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$$

Система 1D нелинейных уравнений (6)

Замена переменных

Утверждение 3. Матрица $\mathbf{A}_U = \mathbf{PAP}^{-1}$ диагонализируема и имеет тот же набор собственных значений, что и матрица $\mathbf{A}$.

Док-во: Было показано, что матрица $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_U\mathbf{P}$ диагонализируема, следовательно, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_U\mathbf{P} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$.
Тогда $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_U\mathbf{PS} = \mathbf{\Lambda}$. Введём матрицу $\mathbf{S}_U = \mathbf{PS}$, тогда $\mathbf{S}_U^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$ и $\mathbf{A}_U = \mathbf{S}_U\mathbf{\Lambda S}_U^{-1}$. ◆

Для матрицы $\mathbf{A}_U$, как и в случае матрицы $\mathbf{A}$, вид матрицы подобия: $\mathbf{S}_U = \left(\mathbf{r}_{U,1} \;\vdots\; \mathbf{r}_{U,2} \;\vdots\; \mathbf{r}_{U,3}\right)$ и $\mathbf{S}_U^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}_{U,1}^T \\ \hdashline \boldsymbol{l}_{U,3}^T \\ \hdashline \boldsymbol{l}_{U,3}^T \end{pmatrix}$,

где $\mathbf{r}_{U,i}$ — правый собственный вектор, а $\boldsymbol{l}_{U,i}^T$ — левый собственный вектор

Назовём вектор $\mathbf{U}$ вектором ***физических*** переменных,

а систему $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_U(\mathbf{U})\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$ — системой в ***неконсервативной*** форме.

Система 1D нелинейных уравнений (7)

Запись системы нелинейных уравнений в характеристической форме

Умножим систему $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_U(\mathbf{U})\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$ на матрицу $\mathbf{S}_U^{-1}$ слева и учтем диагонализируемость матрицы $\mathbf{A}_U$

$$\mathbf{S}_U^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{S}_U^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

Так как матрица $\mathbf{A}_U$ диагонализируема и её левые собственные вектора являются строками матрицы $\mathbf{S}_U^{-1}$. Учитывая этот факт, введём обозначения для характеристических переменных

$$\partial w_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{l}_{U,i}^T \cdot \partial \mathbf{U} \quad \text{Сравнение с линейным случаем} \quad w_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{l}_i^T \cdot \mathbf{U}$$

что позволяет *формально* записать систему уравнений в характеристической форме

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$$

В частных случаях удаётся получить характеристические переменные в явном виде $W_i = \int \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{l}_{U,i}^T \cdot \partial \mathbf{U}$

Система 1D нелинейных уравнений (8)

Линеаризация

Проведём линеаризацию системы законов сохранения $\dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0$

относительно *стационарного однородного состояния* (среднее значение), задаваемого переменной $\mathbf{Q}_0 = const$.

Пусть $\delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0$ — отклонение от среднего (пульсационные переменные). Тогда

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_0)\delta\mathbf{Q} + O\left(\delta\mathbf{Q}^2\right) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) \approx \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_0)\delta\mathbf{Q} \tag{8}$$

Так как $\mathbf{Q}_0 = const$ и $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) = const$, то

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)\right)}{\partial x} = \frac{\partial \delta\mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_0)\frac{\partial \delta\mathbf{Q}}{\partial x} \tag{9}$$

Введём обозначения $\delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ и $\mathbf{A} = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_0)$. В этих обозначениях линеаризованная система (9) относительно линеаризованных консервативных переменных запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

Система 1D нелинейных уравнений (9)

Линеаризация

Запишем линеаризованную систему в физических переменных,
линеаризованную относительно среднего $\mathbf{U}_0 = const$.

Определим приращение $\delta\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \mathbf{Q}(\mathbf{U}) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_0)$ аналогично разложению (8)

$$\delta\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{U}}(\mathbf{U}_0)\delta\mathbf{U} + O\left(\delta\mathbf{U}^2\right) \approx \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{U}_0)\delta\mathbf{U}, \quad \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{U}_0) = const \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}'$$

или, используя обозначения $\mathbf{Q}' = \delta\mathbf{Q}(\mathbf{U}), \mathbf{U}' = \delta\mathbf{U}$, имеем связь между пульсационными переменными

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{U}_0)\mathbf{U}'$$

Тогда система (10) перепишется в виде

$$\frac{\partial\mathbf{Q}'}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{Q}'}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}'}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}'}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\mathbf{U}'}{\partial t} + \mathbf{A}_U\frac{\partial\mathbf{U}'}{\partial x} = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{A}_U = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$$

Замечание о многомерном случае

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{F}_i\left(\mathbf{Q}\right)}{\partial x_i}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}_{U,i}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}=0 \qquad (11)$$

Матрицы $\mathbf{A}_i$ диагонализируемы, но $\mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_j$ при $i \neq j$, следовательно, система уравнений в многомерном случае ***не приводится к диагональному виду единым преобразованием***.

Введём матрицу следующего вида $\mathbf{A}_K=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}_i k_i, \quad k_1^2+k_2^2+k_3^2=1$

Определение 5 (гиперболическая система). Система (11) называется гиперболической <u>*в точке* (*x*, *t*)</u>, если матрица $\mathbf{A}_K$ имеет *n* ***вещественных*** собственных значений $\lambda_{K,1},\ldots,\lambda_{K,n}$ и соответствующий набор из *n* ***линейно независимых*** правых собственных векторов $\mathbf{r}_{K,1},\ldots,\mathbf{r}_{K,n}$.

Метод расщепления по направлениям

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_1\left(\mathbf{Q}\right)}{\partial x_1}=0\\&\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_2\left(\mathbf{Q}\right)}{\partial x_2}=0\\&\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_3\left(\mathbf{Q}\right)}{\partial x_3}=0\end{aligned}\right\}$$

Интегральная формулировка

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathbf{Q}dV+\int_V\frac{\partial \mathbf{F}_i\left(\mathbf{Q}\right)}{\partial x_i}dV&=\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathbf{Q}dV+\int_{\partial V}\left(\mathbf{F}_x\left(\mathbf{Q}\right)n_x+\mathbf{F}_y\left(\mathbf{Q}\right)n_y+\mathbf{F}_z\left(\mathbf{Q}\right)n_z\right)dV\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathbf{Q}dV+\int_{\partial V}\left(\mathbf{A}_x n_x+\mathbf{A}_y n_y+\mathbf{A}_z n_z\right)\mathbf{Q}\,dV=0\end{aligned}$$