Спецкурс «Введение в механику сплошной среды и вычислительную газовую динамику»

Лекция 2
Уравнение Бюргерса
Система уравнений Эйлера
Разрывные решения

Абалакин Илья Владимирович

25 марта 2026 года

1D невязкое уравнение Бюргерса

$$\boxed{u_t + uu_x = 0, \quad u \equiv u(x,t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & u_t + f(u)_x = 0 \\ & f(u) = \frac{u^2}{2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{u_t + f'(u)u_x = 0, \quad f'(u) = u}$$

1D

Вспомним лекцию 1

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \cancel{-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \cancel{-\frac{1}{\rho} \nabla p}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E = -E\nabla \cdot \cancel{\mathbf{u} + \nabla} \cdot p\mathbf{u}$$

При предположении $\nabla p = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ система уравнений Эйлера преобразуется в систему уравнений переноса

Невязкое уравнение Бюргерса

Сопоставим решение

линейной и нелинейной

начальной задачи

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, \quad a = const \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Решение — бегущая волна

$$u(x,t) = u_0(x - at)$$

Аналогично

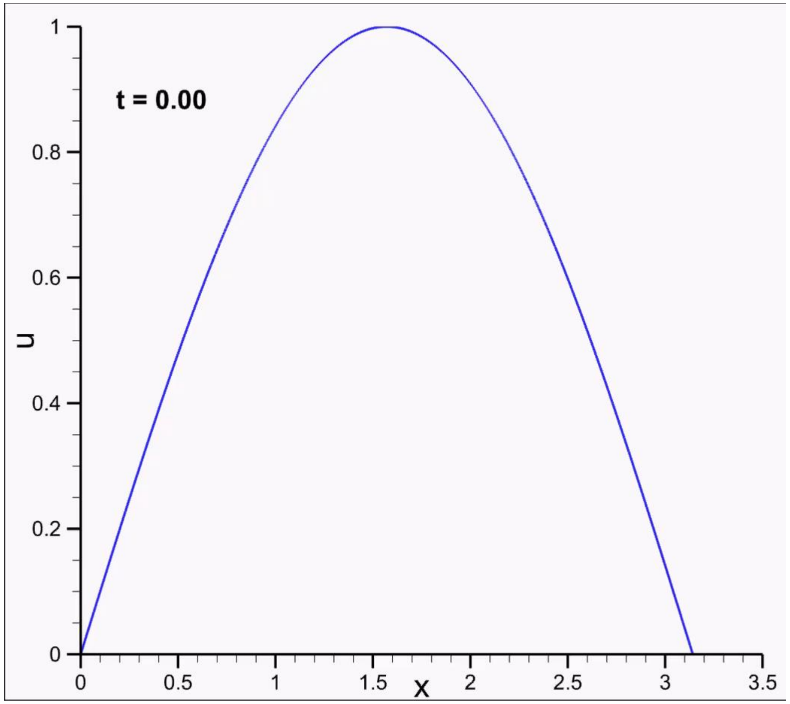
$$u(x,t) = u_0(x - ut)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(x), & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

$$u_x = -\frac{u_0' u}{1 + u_0' t}, \quad u_t = \frac{u_0'}{1 + u_0' t}$$

$$u_0' < 0 \Rightarrow \exists (t_c, x_c) : 1 + u_0'(x_c, t_c) t_c = 0$$

Градиентная катастрофа



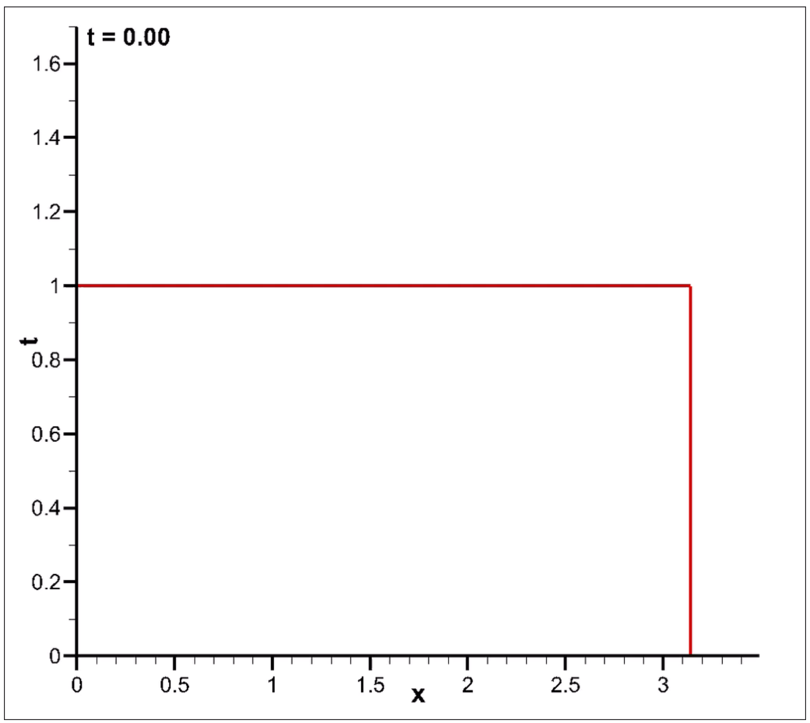
Невязкое уравнение Бюргерса

Уравнение характеристики $\Gamma = \left(x(t), t \right)$: $\dfrac{dx}{dt} = u\left(x, t \right)$

Производная функции $u\left(x(t), t \right)$ вдоль характеристики Γ: $\dfrac{d}{dt} u\left(x(t), t \right) = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} = u_t + u u_x = 0$

$$\Rightarrow \quad u\left(x(t), t \right) = const = u\left(x(0), 0 \right) = u_0\left(x \right) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = u_0\left(x \right), \quad x\left(0 \right) = x_0$$

Характеристики — прямые линии: $x\left(t \right) = u_0\left(x \right) t + x_0$



$$u_0\left(x_1 \right) t + x_1 = u_0\left(x_2 \right) t + x_2 \Rightarrow t = -\frac{x_2 - x_1}{u_0\left(x_2 \right) - u_0\left(x_1 \right)}$$

$$t_c = -\frac{1}{\min\limits_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left(\dfrac{u_0\left(x_2 \right) - u_0\left(x_1 \right)}{x_2 - x_1} \right)} = -\frac{1}{\min\limits_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left(\dfrac{1}{x_2 - x_1} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} u_0'\left(x \right) dx \right)}$$

$$\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} u_0'\left(x \right) dx \right) = \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left(\frac{u_0'\left(x_* \right)}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx \right) \equiv \min_{x_* \in \mathbb{R}} u_0'\left(x_* \right)$$

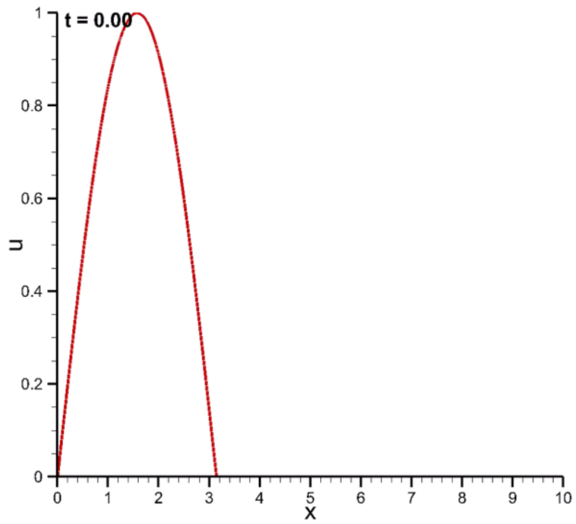
$$t_c = -\frac{1}{\min\limits_{x \in \mathbb{R}} u_0'\left(x \right)}$$

$$\longleftarrow \quad t_c = -\frac{1}{\min\limits_{0 \le x \le \pi} \cos\left(x \right)} = -\frac{1}{\cos\left(\pi \right)} = 1, \quad x_c = \pi$$

Невязкое уравнение Бюргерса

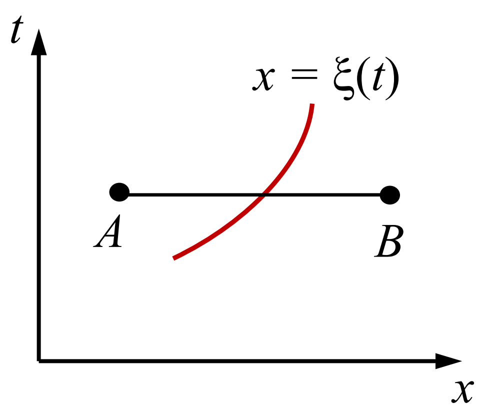
Решение задачи:

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(x), & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases} \end{cases}$$



Соотношение на разрыве

$$u_t = -f(u)_x$$



$$I(t) = \int_A^B u(x,t)\,dx = \int_A^{\xi} u(x,t)\,dx + \int_{\xi}^B u(x,t)\,dx$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_A^{\xi(t)} u(x,t)\,dx + \frac{d}{dt}\int_{\xi(t)}^B u(x,t)\,dx = \int_A^{\xi(t)} u_t(x,t)\,dx + u_L s + \int_{\xi(t)}^B u_t(x,t)\,dx - u_R s$$

$$s = \frac{d\xi(t)}{dt}, \quad u_L = \lim_{x\to\xi+0} u(x,t), \quad u_R = \lim_{x\to\xi-0} u(x,t)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\int_A^{\xi(t)} f_x(u)\,dx + u_L s - \int_{\xi(t)}^B f_x(u)\,dx - u_L s = f(u_A) - f(u_L) + u_L s + f(u_R) - f(u_B) - u_R s$$

$$\frac{dI}{dt} = -\int_A^B f_x(u)\,dx = f(u_A) - f(u_B)$$

$$\boxed{s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}, \quad [f] = s[u]}$$

Условие Ренкина-Гюгонио

Невязкое уравнение Бюргерса

Задача с кусочно-постоянными начальными данными

Задача Римана (RP)

$$u_t + uu_x = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

Пусть $u(x,t)$ есть решение RP, тогда $u(ax,at)$, где $a > 0$ также является решением RP

$$\Downarrow$$

Решение $u(x,t) \equiv u(\xi)$ в **автомодельных** переменных $\xi = \frac{x}{t}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) = -\frac{\xi}{t}\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{du}{d\xi}(u - \xi) = 0$$

Начальное условие в автомодельных переменных

- При $x < 0$ и $t \to +0$: $\xi = x/t \to -\infty$
- При $x > 0$ и $t \to +0$: $\xi = x/t \to +\infty$

$$\lim_{\xi \to -\infty} u(\xi) = u_L, \quad \lim_{\xi \to +\infty} u(\xi) = u_R \qquad \text{(IC)}$$

Равенство выполняется в двух случаях

Случай A: $du/d\xi = 0 \Rightarrow u(\xi) = const$. Такое решение возможно, если $u_L = u_R$.

Случай B: $u(\xi) = \xi$ при $-\infty < \xi < +\infty$.

Невязкое уравнение Бюргерса

Вариант 1: $u_L > u_R$ (**ударная волна**)

Из граничных условий ⇒ решение $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} u(\xi) = const$ причём $u_L \neq u_R$.

$$\Downarrow$$

По отдельности решения **A** и **B** не удовлетворяют начальным условиям IC.

Но комбинируя решения **A** и **B** ,
можно построить решения, удовлетворяющие IC на бесконечности.

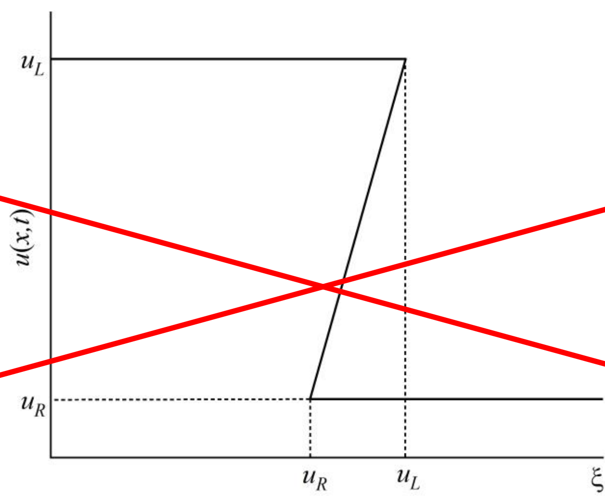
Решение (A+B)$_1$

Решение **B** реализуется на отрезке $u_L \leq \xi \leq u_R$

Решение **A** есть u_L при $\xi \to -\infty$ и u_R при $\xi \to +\infty$ (удовлетворение IC)

Решение непрерывно в точках $\xi = u_L$ и $\xi = u_R$

$$u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi < u_L \\ \xi & u_L \leq \xi \leq u_R \\ u_R & \xi > u_R \end{cases}$$



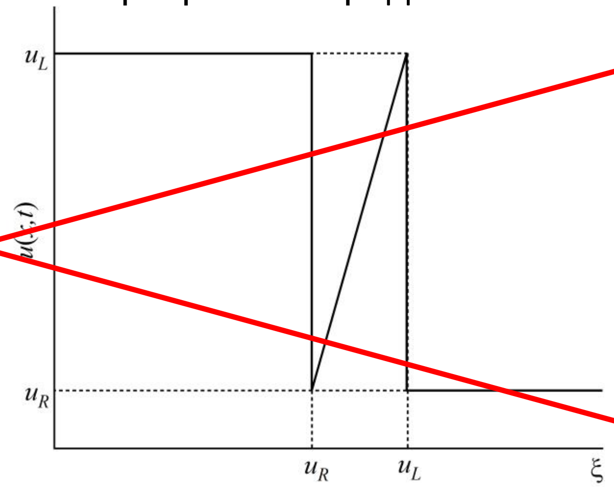
Решение многозначно в интервале
$u_L \leq \xi \leq u_R$

Невязкое уравнение Бюргерса

Решение (A+B)$_2$

Решение **(A+B)$_1$**, но в точках $\xi = u_L$ и $\xi = u_R$ предположим разрыв 2-го рода

$$u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi < u_L \\ \xi & u_L < \xi < u_R \\ u_R & \xi > u_R \end{cases}$$



Скорость левого разрыва равна $u_S = \xi = u_L$, а правого — $u_S = \xi = u_R$

Условие Ренкина-Гюгонио требует — $u_S = (u_L + u_R)/2$

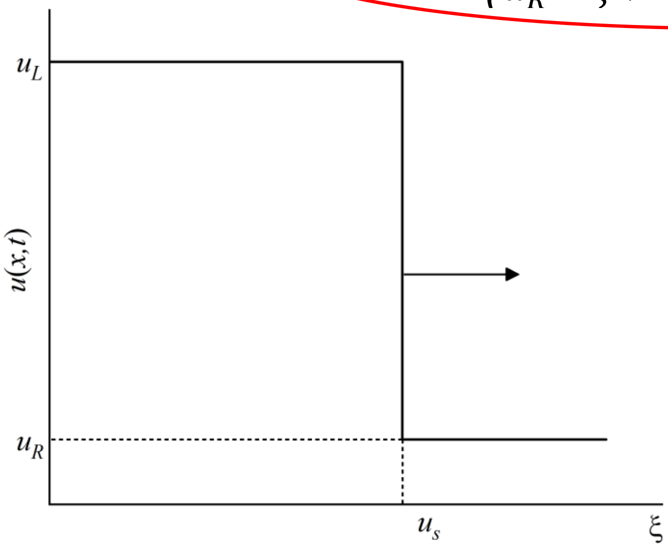
Задание произвольным образом положения разрывов в точках $\xi_0 = const$ определяет их скорости $u_S = \xi_0$, что в общем случае не совместимо с законом сохранения на разрыве (условием Ренкина-Гюгонио).

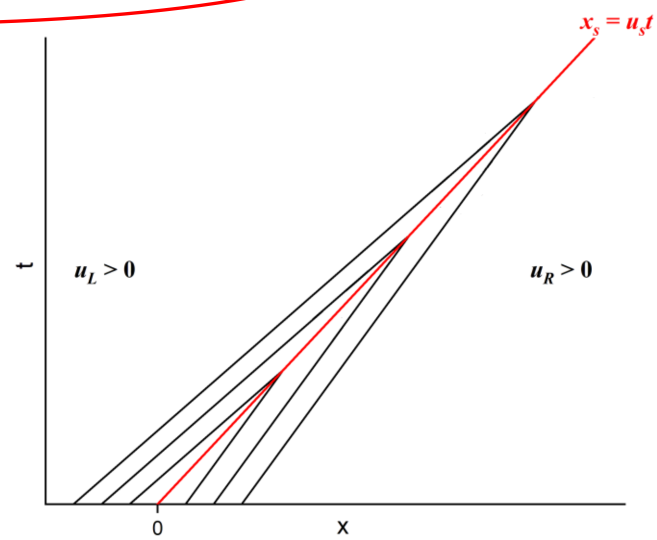
Невязкое уравнение Бюргерса

Решение (A+B)=УВ

Требование выполнения условия Ренкина-Гюгонио и начальных условий позволяет сконструировать **правильное разрывное решение** следующим образом:

$$u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi < u_S \\ u_R & \xi > u_S \end{cases} \qquad u_S = \frac{u_L + u_R}{2}$$





Скорость разрыва равна $\dfrac{dx}{dt} = u_S$

Скорость характеристики слева от разрыва $x < u_S t$ равна $f'(u_L)$
Характеристика «втекает» в линию разрыва (догоняет разрыв слева), то $f'(u_L) > u_S$

Скорость характеристики справа от разрыва $x > u_S t$ равна $f'(u_R)$
Характеристика «втекает» в линию разрыва (догоняет разрыв справа), то $f'(u_R) < u_S$

Невязкое уравнение Бюргерса

Скорость ударной волны (условия Ренкина-Гюгонио): $u_S = \dfrac{f'(u_R) - f'(u_L)}{u_R - u_L}$

Условие Лакса (Lax P.)

Условие «втекания» характеристик в линию разрыва приводит к неравенству

$$f'(u_L) > \frac{f'(u_R) - f'(u_L)}{u_R - u_L} > f'(u_R)$$

Для выпуклого потока $f''(u) > 0$: **условие Лакса** ⇔ условие $u_L > u_R$

Для уравнения Бюргерса $f(u) = \dfrac{u^2}{2}, f'(u) = u$ условие Лакса принимает вид:

$$u_L > \frac{u_R^2 - u_L^2}{2(u_R - u_L)} > u_R \Leftrightarrow u_L > \frac{u_R + u_L}{2} > u_R \Leftrightarrow u_L > u_R$$

Невязкое уравнение Бюргерса

Вариант 2: $u_L < u_R$ (**волна разрежения**)

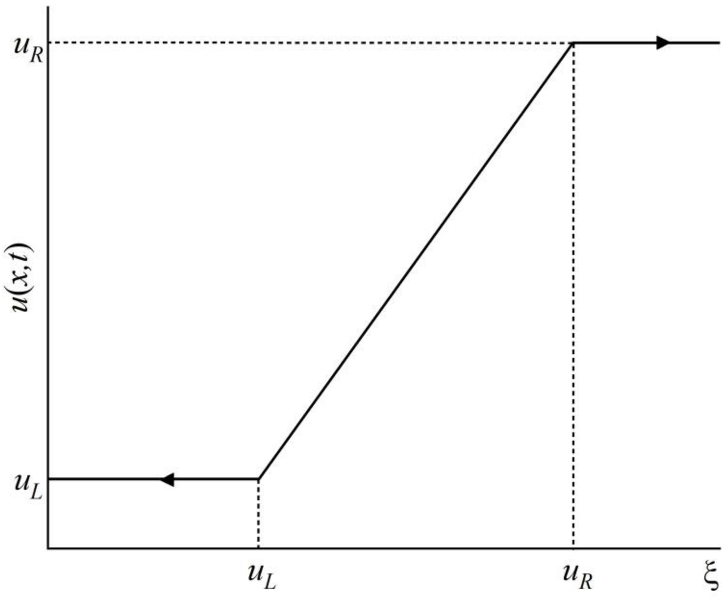
Рассмотрим следующую комбинацию решений **(A+B)$_1$**

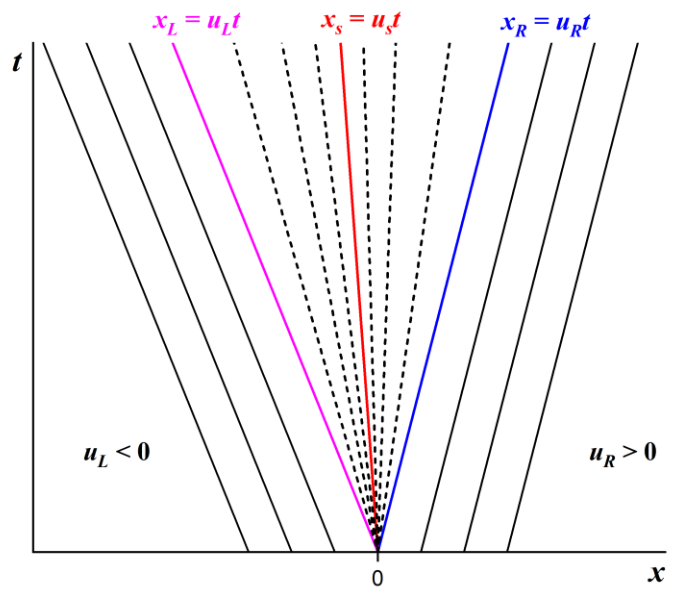
$$u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi < u_L \\ \xi & u_L \le \xi \le u_R \\ u_R & \xi > u_R \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Решение **A** с $\mathrm{const} = u_L$

$\longleftarrow$ Решение **B**

$\longleftarrow$ Решение **A** с $\mathrm{const} = u_R$





Однозначное непрерывное решение, но не дифференцируемо в точках $x = u_L t$ и $x = u_R t$

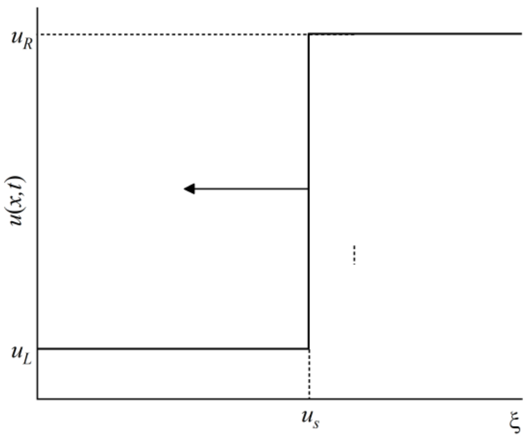
Область $u_L t \le x \le u_R t$, заполненная веером характеристик $x - ut = 0$, определяет **центрированную волну разрежения**

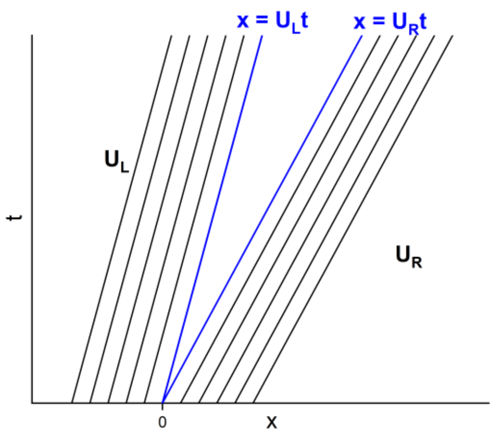
Невязкое уравнение Бюргерса

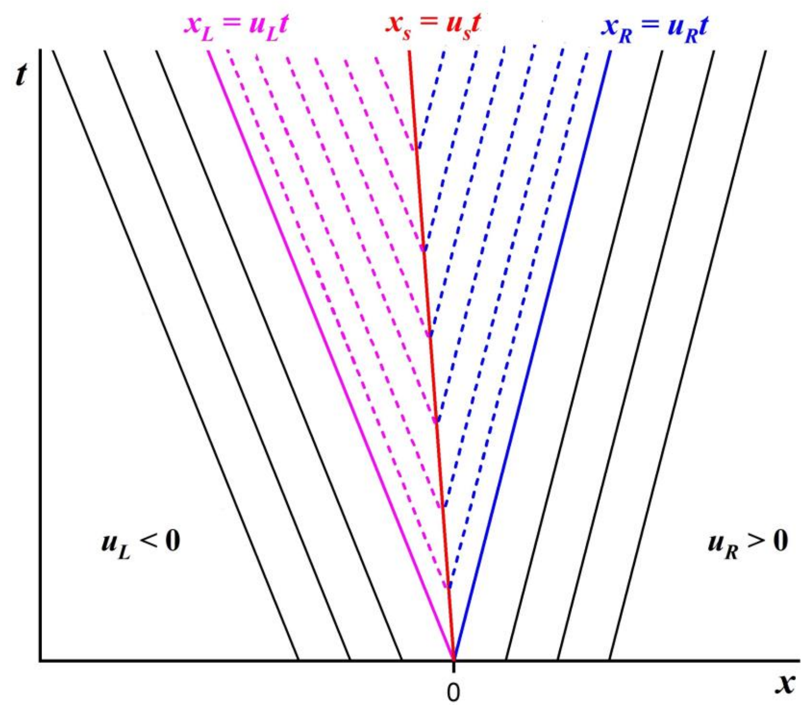
Вариант 2: $u_L < u_R$ (**ударная волна разрежения**)

Можно построить разрывное решение типа решения **(A+B)=УВ** с выполнением условий Ренкина-Гюгонио

$$u(\xi) = \begin{cases} u_L & \xi < u_S \\ u_R & \xi > u_S \end{cases} \quad u_S = \frac{u_L + u_R}{2}$$







Область $u_L t \le x \le u_R t$ заполняется исходящими из линии разрыва характеристиками $x = u_L(t - t_s) + x_s$ и $x = u_R(t - t_s) + x_s$

Невязкое уравнение Бюргерса

Вариант 2: $u_L < u_R$ (**как определить единственное решение?**)

Рассмотрим задачу с кусочно-постоянными начальными условиями значениями для **вязкого** уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

Пусть есть решение вязкой задачи $u^\nu(x,t,\nu)$.

Тогда решение невязкой задачи можно определить как

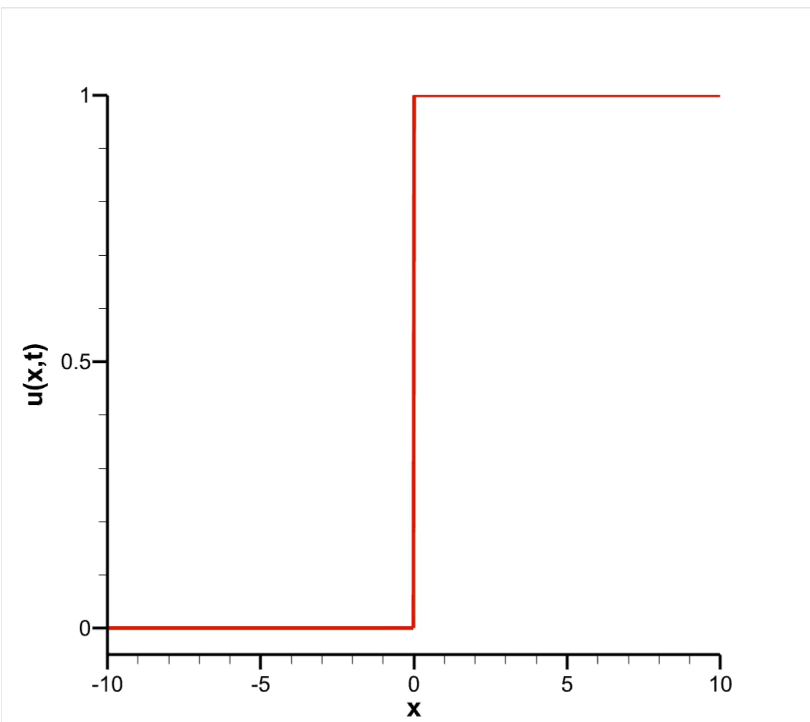
$$u(x,t) = \lim_{\nu \to 0} u^\nu(x,t,\nu)$$

Решение типа волны разрежения

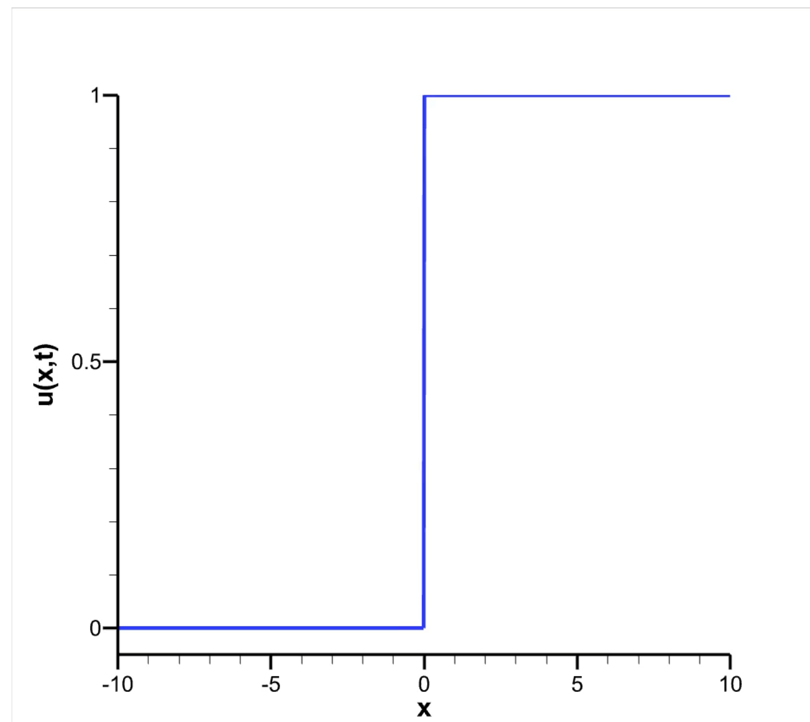
$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\frac{2x-t}{4\nu}\right)\operatorname{erfc}\left(-\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}\right)}{\exp\left(-\frac{2x-t}{4\nu}\right)\operatorname{erfc}\left(-\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}\right)} \qquad \operatorname{erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-y^2} dy$$

$\nu = 0$



$\nu = 0.02$

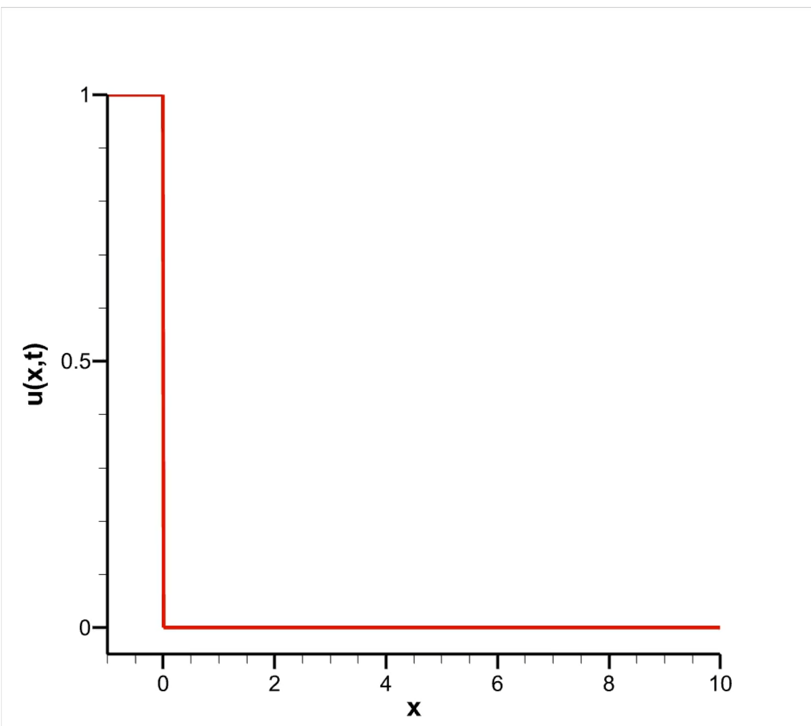


Решение типа ударной волны

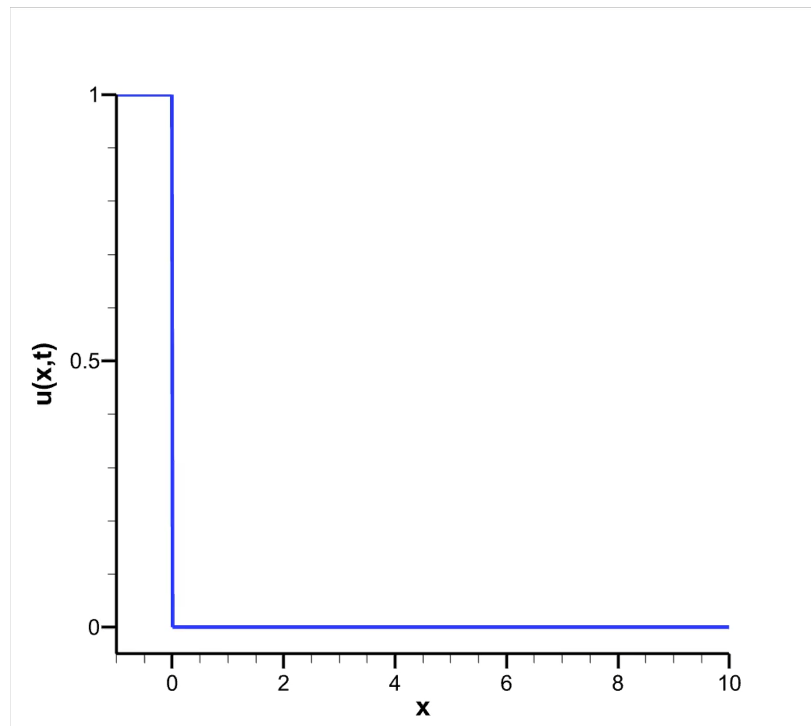
$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\exp\left(-\frac{2x-t}{4\nu}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}\right)}{\exp\left(-\frac{2x-t}{4\nu}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}\right)} \qquad \operatorname{erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-y^2} dy$$

$\nu = 0$



$\nu = 0.02$



Энтропийное условие (1)

Разрывное решение задачи (УВ) существует, если $u_L > u_R \Rightarrow u_L > \dfrac{u_L + u_R}{2} > u_R$

Энтропийное условие 1

$$\boxed{f'(u_L) > s > f'(u_R)}$$

Истинно для произвольного выпуклого потока $f''(u) > 0$

Математическое определение энтропии: $\left(U(u) : U''(u) \geq 0, \quad F(u)\right)$

$U(u)$ задано. Определим поток энтропии, исходя из уравнения: $U_t(u) + F_x(u) = 0$

$U'(u)u_t + F'(u)u_x = 0$ и сопоставим с уравнением $u_t + f'(u)u_x = 0$

$$F'(u) = U'(u)f'(u) \qquad F(u) = \int_0^u U'(z)f'(z)dz = U(z)f'(z)\Big|_0^u - \int_0^u U(z)f''(z)dz$$

$$f'(0) = 0, \quad F(u) = U(u)f'(u) - \int_0^u U(z)f''(z)dz$$

Для уравнения Бюргерса: $U(u) = \dfrac{u^2}{2}, \quad f'(u) = u \qquad \Rightarrow F(u) = \dfrac{u^3}{3}$

$$u(u_t + uu_x) = \left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = U_t(u) + F_x(u) = 0$$

Энтропийное условие (3)

Понятие слабого решения

$$\varphi(x,t) \in C_0^1 \Leftrightarrow \varphi \in C^1 : \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : \varphi(x,t) \neq 0\} \subset [a,b] \times [0,T]$$

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u_t + f_x(u)\right)\varphi(x,t)\,dxdt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u\varphi_t + f(u)\varphi_x\right)dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\varphi(x,0)\,dx$$

$u^\nu : u_t^\nu + f_x(u^\nu) = \varepsilon u_{xx}^\nu$ $\quad$ $u = \lim\limits_{\nu \to 0} u^\nu : u_t + f_x(u) = 0$ $\quad$ решение с исчезающей вязкостью

Если существует решение с исчезающей вязкостью , то оно есть слабое решение

Решение с исчезающей вязкостью удовлетворяет уравнению

$U_t(u) + F_x(u) \le 0$ $\quad$ Энтропийное условие 2