

# Лекция 3

## Система уравнений Эйлера

### Разрывные решения

Абалакин Илья Владимирович

1 апреля 2026 года

# Замыкание уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0 \quad E = \frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon$$

Четыре неизвестных –  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ . Три уравнения. Необходимо ещё одно уравнение

Это уравнение – уравнение состояния, например,  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$  или  $p = p(\varepsilon, \rho)$

Необходимо знание термодинамики и её законов

# Термодинамика

**1-ый закон термодинамики**  $d\varepsilon = \delta Q - pd\eta$

Работа газа при изменении объёма  
 $\delta a = -pd\eta, \quad \eta = 1/\rho$

Обмен теплом с внешними телами  
 $\delta Q$

Внутренняя энергия  $\varepsilon$  является *однозначной функцией состояния газа*\*).  
 $Q$  и  $a$  зависят от состояния системы и от процесса, в результате которого система пришла в это состояние.

$$\left. \begin{array}{l} dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad TdS = d\varepsilon + pd\eta \quad \text{равновесные процессы} \\ dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \text{неравновесные процессы} \end{array} \right\} \text{1-ой закон термодинамики}$$

Энтропия — *функция состояния газа*.

Для теплоизолированных систем (*адиабатических систем*) —  $\delta Q = 0$

$$dS \geq 0 \quad \text{2-ой закон термодинамики}$$

\*) Термодинамическая функция состояния — это функция параметров системы, которая зависит только от значений параметров в конечных точках пути изменения системы

# Уравнения состояния, энтропия

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$$

	$p = \rho RT, \quad \varepsilon = \varepsilon(T)$	идеальный газ	
	$\varepsilon = c_v T \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad R = c_p - c_v$		}
	$\varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T$	совершенный газ	

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$$

$$TdS = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right); \quad TdS = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} dp$$

$$\frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} \cdot TdS = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} dp \right)$$

$$\frac{\gamma - 1}{R} \frac{p}{\rho^\gamma} dS = \frac{\gamma p}{\rho^{\gamma - 1}} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^\gamma} dp = d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) \quad \frac{\gamma - 1}{R} dS = \frac{\rho^\gamma}{p} d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$$

Энтропия

$$S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + const$$

Для гладких адиабатических течений  $dS = 0$

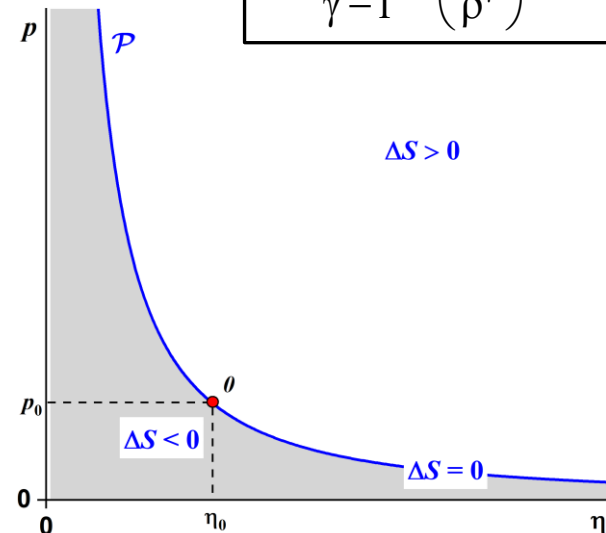
$$d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = const, \quad p\eta^\gamma = const$$

адиабата Пуассона  $p = \frac{p_0 \eta_0^\gamma}{\eta^\gamma}$

$$\tilde{S} = \exp(S/C) = p/\rho^\gamma \quad \frac{d\tilde{S}}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$$

$$C = R/(\gamma - 1)$$


Замечание  
Энтропийная функция



# Скорость звука

$$p = p(\rho, S) \quad dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S d\rho + \frac{\partial p}{\partial S} \Big|_\rho dS = c^2 d\rho \quad \boxed{c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S}$$
$$dS = 0$$

Для идеального газа  $p = C\rho^\gamma$   $\frac{\partial p}{\partial \rho} = C\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma} \gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}$



$$\boxed{c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}}$$

## Уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = (\rho, m, E)^T = \left( \rho, \rho u, \rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right)^T$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left( E - \frac{m^2}{2\rho} \right) \\ \frac{m}{\rho} \left( \gamma E - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (\text{Л1})$$

$$\mathbf{A}(\rho, u, p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\gamma - 3) \frac{u^2}{2} & -(\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ u \left[ (\gamma - 2) \frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{\gamma - 1} \right] & -(2\gamma - 3) \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

# Уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_U(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A}_U = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \quad (\text{Л1 Замена переменных})$$

$$\mathbf{U} = (\rho, u, p)^T \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ (\gamma-1)\frac{u^2}{2} & -u(\gamma-1) & \gamma-1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_U = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

# Уравнения Эйлера

$$\mathbf{A}_U = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_U(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_U(\mathbf{U}) \mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}) \mathbf{S}_U^{-1}(\mathbf{U}) \quad (\text{Л1 замена переменных и важное замечание})$$

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix}$$

Собственные значения

$$\mathbf{S}_U(\mathbf{U}) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{U}) \parallel \mathbf{r}_2(\mathbf{U}) \parallel \mathbf{r}_3(\mathbf{U})) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{pmatrix}$$

Правые собственные вектора

$$\mathbf{S}_U^{-1}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{l}_1^T(\mathbf{U})}{\rho c} \\ \frac{\mathbf{l}_2^T(\mathbf{U})}{\rho c} \\ \frac{\mathbf{l}_3^T(\mathbf{U})}{\rho c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}$$

Левые собственные вектора

# Уравнения Эйлера в характеристической форме (1)

Покомпонентная запись  
в физических переменных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Векторная форма

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_U(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{U} = (\rho, u, p)^T, \quad \mathbf{A}_U = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_U^{-1}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ \hline 0 & 1 & 1/\rho c \\ \hline 0 & 1 & -1/\rho c \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_U = \mathbf{S}_U \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_U^{-1}$$

$$\mathbf{S}_U^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_U^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

Уравнения Эйлера в характеристической форме

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ (u+c) \\ (u-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{S}_U^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

Характеристические переменные в дифференциалах

$$dw_1 = \partial \rho - \frac{1}{c^2} \partial p$$

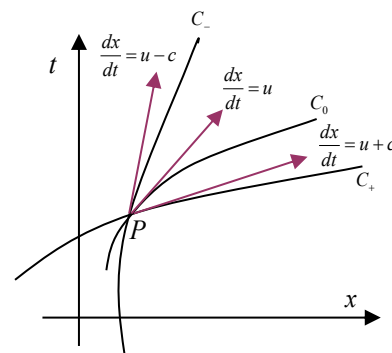
$dw_1 = const$  и распространяется со скоростью  $u$  вдоль **энтропийной** характеристики  $C_0$ :  $dx/dt = u$

$$dw_2 = \partial u + \frac{1}{\rho c} \partial p$$

$dw_2 = const$  и распространяется со скоростью  $u + c$  вдоль акустической характеристики  $C_+$ :  $dx/dt = u + c$

$$dw_3 = \partial u - \frac{1}{\rho c} \partial p$$

$dw_3 = const$  и распространяется со скоростью  $u - c$  вдоль акустической характеристики  $C_-$ :  $dx/dt = u - c$



# Уравнения Эйлера в характеристической форме (1а)

Из законов сохранения следует система уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

дополненная уравнением состояния

$$p = p(\rho, S) \quad (4)$$

Производные давления

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_S \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_S \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \quad (6)$$

(5) + u × (6) и учтём (3)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (7)$$

Перепишем (1), используя (7)

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

(2) + (c/ρ) × (8)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (9)$$

(2) - (c/ρ) × (8)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (10)$$

Перепишем (9) и (10)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

Для идеального газа

$$S = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + C \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{c_V \rho^\gamma}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\gamma p}{\rho} \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \left( \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0$$

## Уравнения Эйлера в характеристической форме (2)

Используя соотношение на адиабате Пуассона:  $S = p/\rho^\gamma$ ,  $p = K\rho^\gamma$ ,  $c^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$   
 характеристические переменные в дифференциалах могут быть проинтегрированы и  
 выражены явным образом

$$w_1 = S \quad \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{Перенос энтропии}$$

$$w_2 = u + \frac{2}{\gamma-1}c \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0$$

$$w_3 = u - \frac{2}{\gamma-1}c \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0 \quad \text{Перенос акустических волн}$$

Предположим течение изоэнтропическим –  $S = const$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

$r = u + \frac{2}{\gamma-1}c$	<b>Переменные Римана</b>
$l = u - \frac{2}{\gamma-1}c$	<b>инварианты Римана</b>

$$u = \frac{r+l}{2}$$

$$c = \frac{\gamma-1}{4}(r-l)$$

$$r = u + \frac{2}{\gamma-1}c = const \quad \text{при} \quad dx = (u+c)dt \quad \text{характеристика } C_+$$

$$l = u - \frac{2}{\gamma-1}c = const \quad \text{при} \quad dx = (u-c)dt \quad \text{характеристика } C_-$$

## Уравнения Эйлера в характеристической форме (2а)

Используя соотношение на адиабате Пуассона:  $S = \frac{p}{\rho^\gamma}$  (1),  $p = K\rho^\gamma$  (2),  $c^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$  (3)

$$\partial S^{(1)} = \partial \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{1}{\rho^\gamma} \partial p - \underbrace{\gamma \frac{p}{\rho}}_{c^2} \frac{1}{\rho^\gamma} \partial \rho = -\frac{c^2}{\rho^\gamma} \left( \partial \rho - \frac{1}{c^2} \partial p \right), \quad (5)$$

$$\partial u + \frac{1}{\rho c} \partial p^{(2)} = \partial u + \left( \frac{1}{\rho c} \right) K \gamma \rho^{\gamma-1} \partial \rho = \partial u + \left( \frac{1}{\rho c} \right) K \gamma \rho^{\gamma-1} \left( \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho c}{K \gamma \rho^{\gamma-1}} \partial c \right) = \partial u + \frac{2}{\gamma-1} \partial c \quad (6)$$

Таким образом, используя соотношения (5)-(6), переменные Римана могут быть получены явным образом

$$w_1 = S, \quad w_2 = u + \frac{2}{\gamma-1} c, \quad w_3 = u - \frac{2}{\gamma-1} c$$

В результате,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Перенос энтропии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0$$

Перенос акустических волн

# Простые волны. Волны Римана

Пусть инвариант Римана  $l = l_0 = const$   
**во всей области течения**  
(а не только вдоль характеристики  $C_-$ )

⇒

$l = l_0 = const$  вдоль характеристики  $C_+$

⇓

Инвариант Римана  $r = r_0 = const$   
вдоль характеристики  $C_+$   
(по определению)

⇒

$u = (r_0 + l_0)/2 = const$   
 $c = (r_0 - l_0)(\gamma - 1)/4 = const$   
вдоль характеристики  $C_+$

⇒

$C_+$  характеристика  
 $dx - (u + c)dt = 0$ ,  
где  $u + c = const$

$$x - (u + c)t = F(r)$$

1. В рассматриваемом течении  $C_+$  характеристики являются **прямыми линиями**.
2. Вдоль  $C_+$  характеристики все газодинамические величины  $u, c, \rho, p$  постоянны.

$$l(u, c) = l_0, \quad x - (u + c)t = f(u)$$

При фиксированном  $l_0$ :

$$u - \frac{2}{\gamma - 1}c = l_0, \quad r + \frac{2}{\gamma - 1}c = l_0 \Rightarrow u = \frac{r + l_0}{2}$$

$$f(u) = F(2u - l_0), \quad F(r) = f\left(\frac{r + l_0}{2}\right)$$

Течение, описываемое этими соотношениями (интегралами) есть **простая волна Римана**.

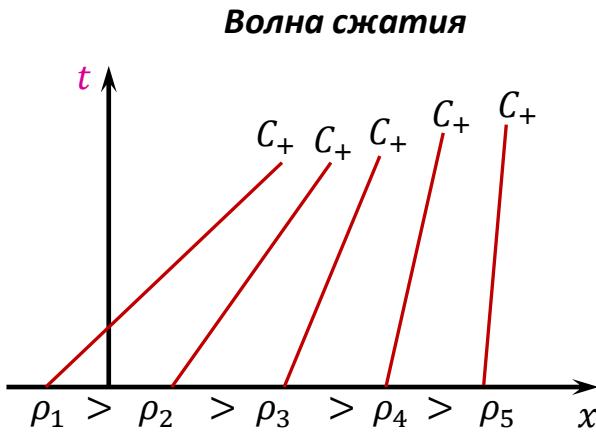
Аналогичные простая волна для семейства  $C_-$  характеристик

$$r(u, c) = r_0, \quad x - (u - c)t = g(u)$$

# Простые волны. Волны сжатия и разрежения

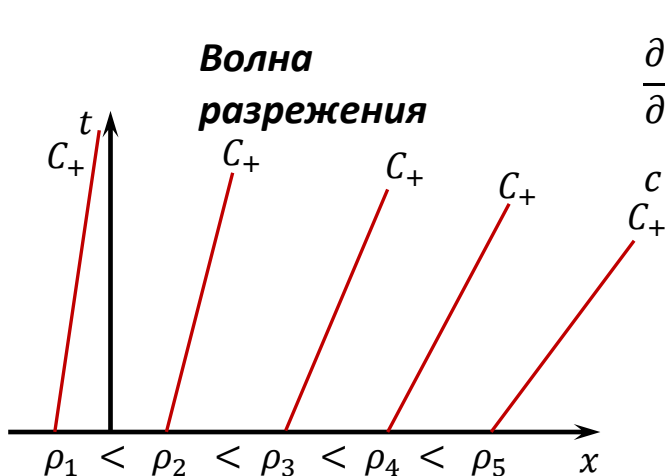
При прохождении простой волны по частицам газа (а движется эта волна со скоростью звука) плотность и давление могут как увеличиваться, так и уменьшаться. В первом случае волна Римана называется **волной сжатия**, а во втором – **волной разрежения**

Рассмотрим  $C_+$  простую волну (для  $C_-$  простой волны анализ проводится аналогично)



$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0 \\ c \sim \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (\gamma > 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial x} < 0 \\ u = l_0 + \frac{2}{\gamma-1} c \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial(u+c)}{\partial x} < 0$$

С ростом  $x$  (при фиксированном  $t$ ) угол между осью  $x$  и  $C_+$  характеристики растет (левые характеристики движутся **быстрее**, чем правые). Это означает, что семейство прямолинейных  $C_+$  характеристик образует сходящийся кверху веер



$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0 \\ c \sim \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (\gamma > 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial x} > 0 \\ u = l_0 + \frac{2}{\gamma-1} c \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial(u+c)}{\partial x} > 0$$

С ростом  $x$  (при фиксированном  $t$ ) угол между осью  $x$  и  $C_+$  характеристики уменьшается (левые характеристики движутся **медленнее**, чем правые), следовательно, что прямолинейные  $C_+$  характеристики образует расходящийся кверху веер.

# Центрированная волна разрежения (1)

Рассмотрим простую волну Римана, движущуюся слева направо ( $C_+$  характеристики прямые линии)

$$u - 2c/(\gamma - 1) = l_0, \quad x - (u + c)t = f(u)$$

Положим  $f(u) = 0$

все характеристики выходят из начала координат  $x = 0, t = 0$

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{x}{t} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} l_0, \quad c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \left( \frac{x}{t} - l_0 \right)$$

Положим  $l_0 = -2c_0/(\gamma - 1)$

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \left( \frac{x}{t} - c_0 \right), \quad c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{x}{t} + \frac{2c_0}{\gamma + 1} \quad (*)$$

Простая волна с центром в точке  $(0,0)$  на плоскости  $(x, t)$  описываемое формулами  $(*)$ , называется *центрированной волной разрежения*

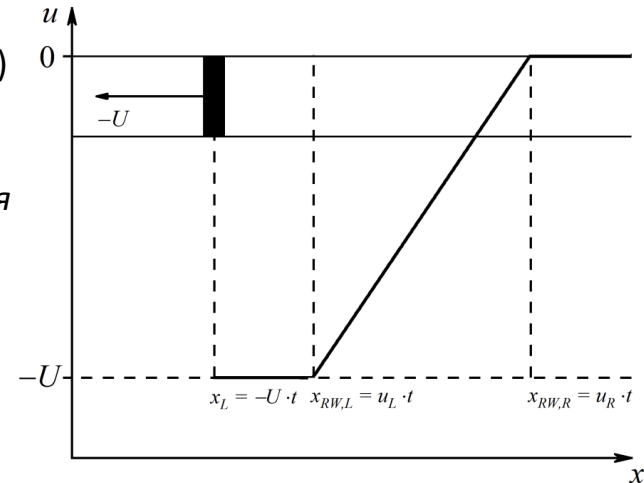
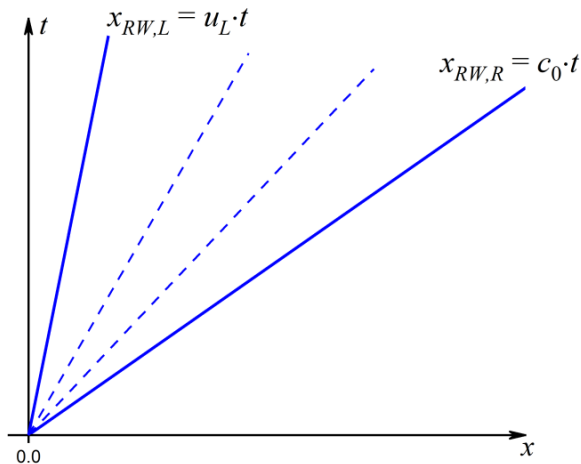
Решение зависит от переменной

$$\xi = \frac{x}{t}$$

**Автомодельное**

или

**«самоподобное» решение**



$$u_L = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} U, \quad u_R = c_0$$

## Центрированная волна разрежения (2)

Задача о «поршне»

$$u(x, t) = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_0 \right)$$

Справа

$$0 = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_0 \right) \Rightarrow x_{RW,R} = c_0 t \Rightarrow u_R = c_0$$

Слева

$$-U = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_0 \right) \Rightarrow x_{RW,L} = \left( c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} U \right) t$$

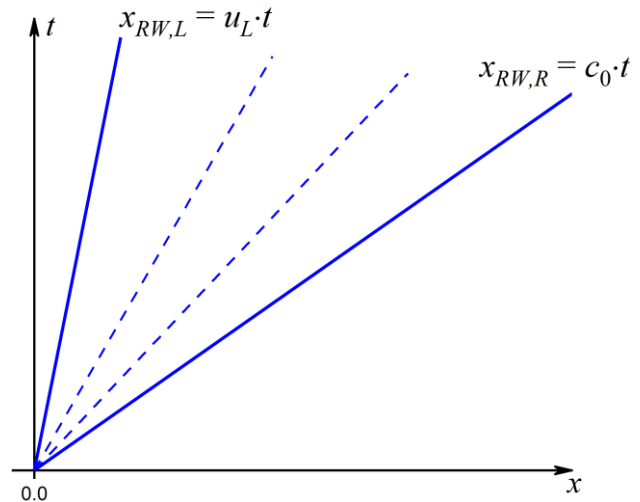
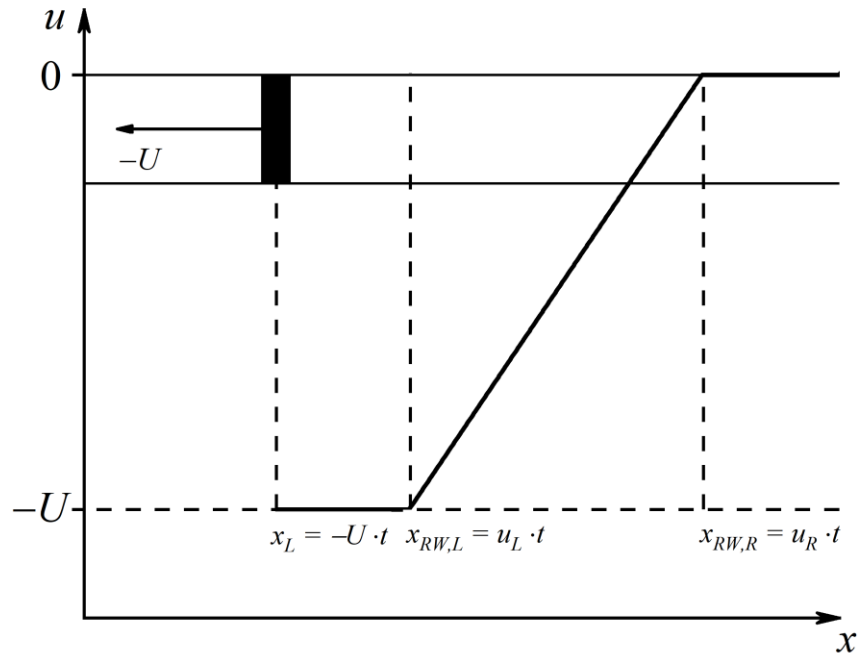
$$\Rightarrow u_L = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} U$$

$$x_L < x_{RW,L} \Rightarrow -U < u_L \Rightarrow U < \frac{2}{\gamma - 1} c_0$$

Иначе за поршнем образуется область вакуума

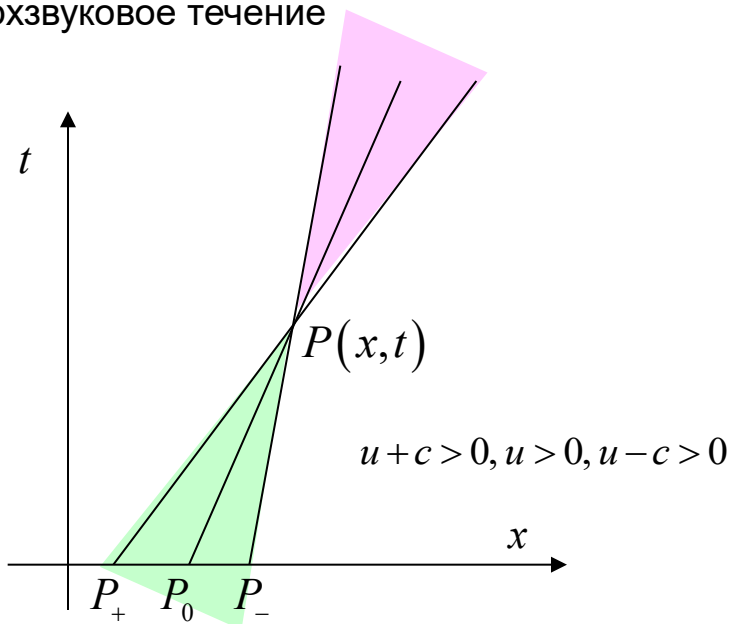
Для воздуха  $\gamma = 1.4$ ,  $c_0 = 331 \text{ м/с}$

$$U < 1.65 \text{ км/с}$$



# Характеристики в $x-t$ плоскости: дозвуковое и сверхзвуковое течение

Сверхзвуковое течение



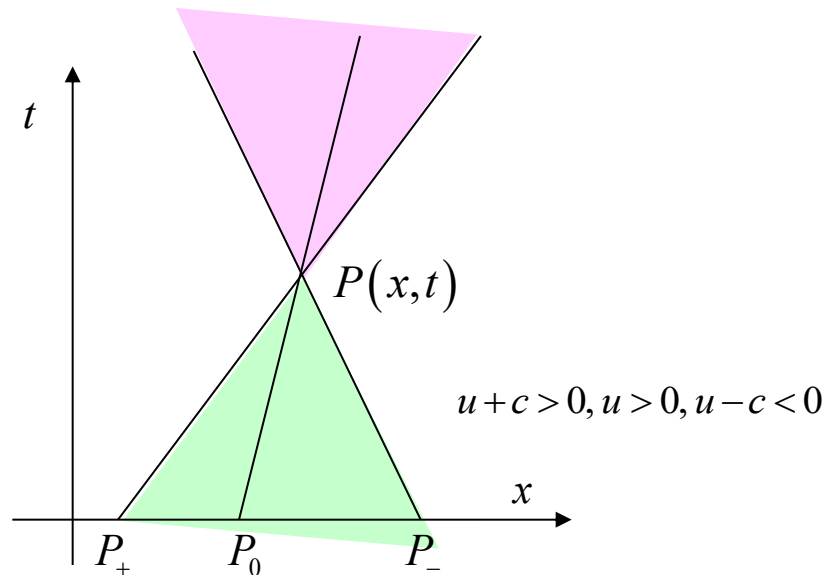
- область зависимости

$$s(P) = s(P_0)$$

$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P) = \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+)$$

$$\left(u - \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P) = \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_-)$$

Дозвуковое течение



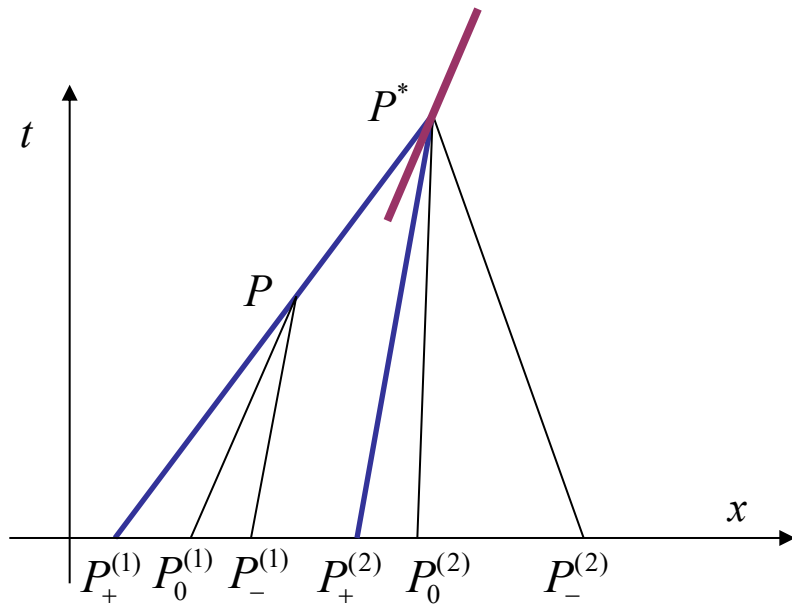
- область влияния

перенос со скоростью  $u$

перенос со скоростью  $u+c$

перенос со скоростью  $u-c$

# Характеристики в $x$ - $t$ плоскости: разрывы



$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P^*) = \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(1)})$$
$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P^*) = \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(2)})$$
$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(1)}) \neq \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(2)})$$



разрыв = ударная волна

## Соотношения на разрыве

$$\mathbf{Q}_t = -\mathbf{F}_x(\mathbf{Q})$$

$$\int_A^B \mathbf{Q}(x, t) dx = \mathbf{I}(t) = \int_A^{\xi(t)} \mathbf{Q}(x, t) dx + \int_{\xi(t)}^B \mathbf{Q}(x, t) dx$$

$$\int_A^B \mathbf{Q}_t(x, t) dx = \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \int_A^{\xi} \mathbf{Q}_t(x, t) dx + \mathbf{Q}_L \mathcal{D} + \int_{\xi}^B \mathbf{Q}_t(x, t) dx - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}$$

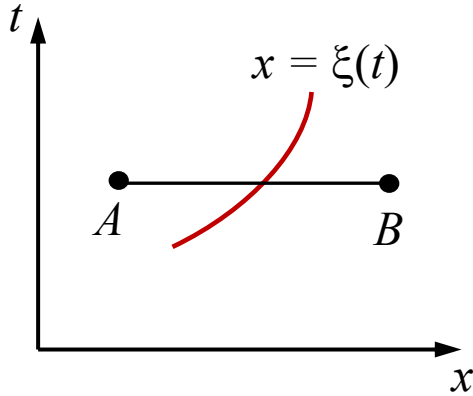
$$\mathcal{D} = \frac{d\xi(t)}{dt}, \quad \mathbf{Q}_L = \lim_{x \rightarrow \xi+0} \mathbf{Q}(x, t), \quad \mathbf{Q}_R = \lim_{x \rightarrow \xi-0} \mathbf{Q}(x, t)$$

$$-\int_A^B \mathbf{F}_x(\mathbf{Q}) dx = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = -\int_A^{\xi} \mathbf{F}_x(\mathbf{Q}) dx + \mathbf{Q}_L \mathcal{D} - \int_{\xi}^B \mathbf{F}_x(\mathbf{Q}) dx - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_A) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_B) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_A) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{Q}_L \mathcal{D} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_B) - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}$$

**Условия Ренкина-Гюгонио**

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) - \mathbf{Q}_L \mathcal{D} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}}$$



## Соотношения на разрыве

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{U}_L \mathcal{D} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{U}_R \mathcal{D}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0$$

$$\rho_1 u_1 - \rho_1 \mathcal{D} = \rho_0 u_0 - \rho_0 \mathcal{D}$$

$$\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \mathcal{D} = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \mathcal{D}$$

$$\underline{\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})}$$

$$\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \frac{\mathcal{D}^2}{2} = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \frac{\mathcal{D}^2}{2}$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 - \rho_1 u_1 \mathcal{D} = \rho_0 u_0^2 + p_0 - \rho_0 u_0 \mathcal{D}$$

$$\rho_1 u_1^2 - \rho_1 u_1 \mathcal{D} - \rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \mathcal{D} + p_1 = \rho_0 u_0^2 - \rho_0 u_0 \mathcal{D} - \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \mathcal{D} + p_1 \quad \rho_1 (u_1 - \mathcal{D})^2 \mathcal{D} + p_1 \mathcal{D} = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})^2 \mathcal{D} + p_1 \mathcal{D}$$

$$\underline{\rho_1 (u_1 - \mathcal{D})^2 + p_1 = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})^2 + p_0}$$

$$u_1 (E_1 + p_1) - E_1 \mathcal{D} = u_0 (E_0 + p_0) - E_0 \mathcal{D}$$

$$\rho_1 \left( \frac{u_1^3}{2} - \frac{u_1^2 \mathcal{D}}{2} \right) + \rho_1 \varepsilon_1 u_1 + p_1 u_1 - \rho_1 (u_1 - \mathcal{D})^2 \mathcal{D} - p_1 \mathcal{D} - \rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \frac{\mathcal{D}^2}{2} = \dots$$

$$\underline{\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \left( p_1 + \rho_1 \varepsilon_1 + \frac{(u_1 - \mathcal{D})^2}{2} \right) = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \left( p_0 + \rho_0 \varepsilon_0 + \frac{(u_0 - \mathcal{D})^2}{2} \right)}$$

# Соотношения на разрыве: контактный разрыв

Поток массы вещества через разрыв  $m = \rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})$

**Контактный разрыв**  $m = 0$

$$\rho_0 \neq 0, \quad \rho_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 - \mathcal{D} = u_0 - \mathcal{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_1 = u_0 = \mathcal{D}}$$

Из второго соотношения Рэнкина-Гюгонио  $\rho_1 \underbrace{(u_1 - \mathcal{D})^2}_{=0} + p_1 = \rho_0 \underbrace{(u_0 - \mathcal{D})^2}_{=0} + p_0$

следует, что  $\boxed{p_1 = p_0}$

**Ударная волна**  $m \neq 0$

# Соотношения на разрыве: ударная волна

В системе координат, движущейся вместе с разрывом со скоростью  $\mathcal{D}$

$$\rho_1 \tilde{u}_1 = \rho_0 \tilde{u}_0$$

$$\rho_1 \tilde{u}_1^2 + p_1 = \rho_0 \tilde{u}_0^2 + p_0$$

$$\rho_1 \tilde{u}_1 \left( p_1 + \rho_1 \varepsilon_1 + \frac{\tilde{u}_1^2}{2} \right) = \rho_0 \tilde{u}_0 \left( p_0 + \rho_0 \varepsilon_0 + \frac{\tilde{u}_0^2}{2} \right)$$

$$\tilde{u} = u - \mathcal{D}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)\eta_0 - (\gamma-1)\eta_1}{(\gamma+1)\eta_1 - (\gamma-1)\eta_0}, \quad \eta = \frac{1}{\rho}$$

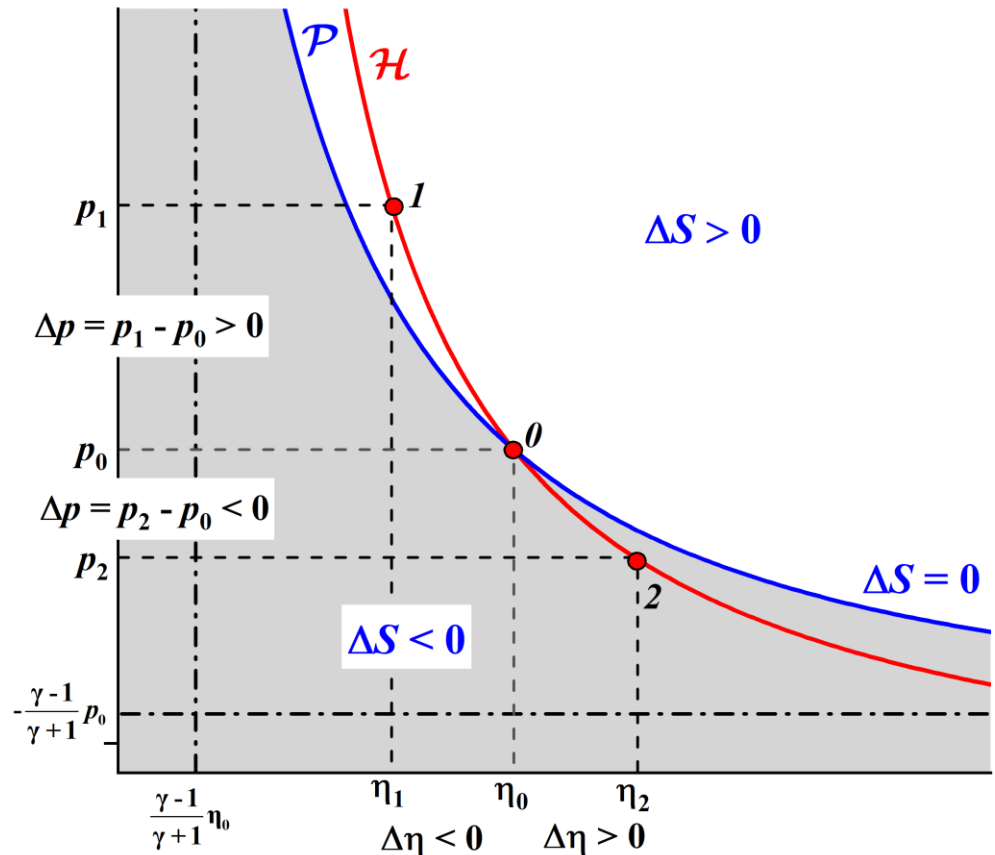
Фиксируем параметры 0

адиабата Гюгонио

$$p(\eta) = p_0 \frac{(\gamma+1)\eta_0 - (\gamma-1)\eta}{(\gamma+1)\eta - (\gamma-1)\eta_0}$$

адиабата Пуассона

$$p = \frac{p_0 \eta_0^\gamma}{\eta^\gamma}$$



# Распад произвольного разрыва (задача Римана)

Начальная задача для 1D системы уравнений Эйлера

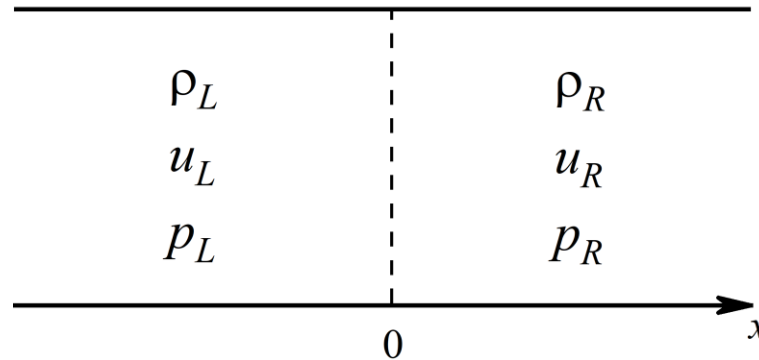
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0 \end{cases}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

$$p(x, 0) = \begin{cases} p_L, & x < 0 \\ p_R, & x > 0 \end{cases}$$



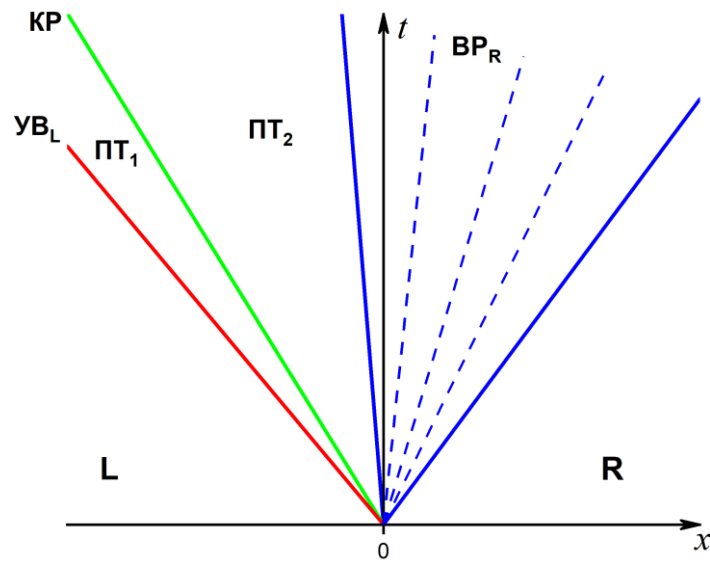
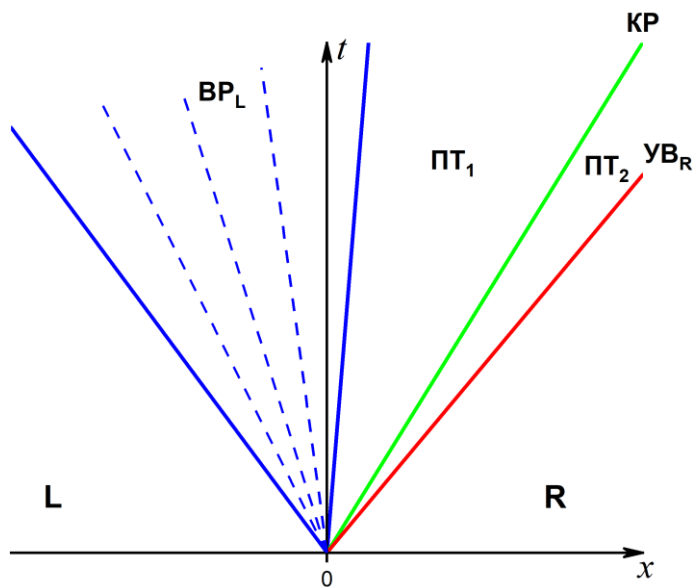
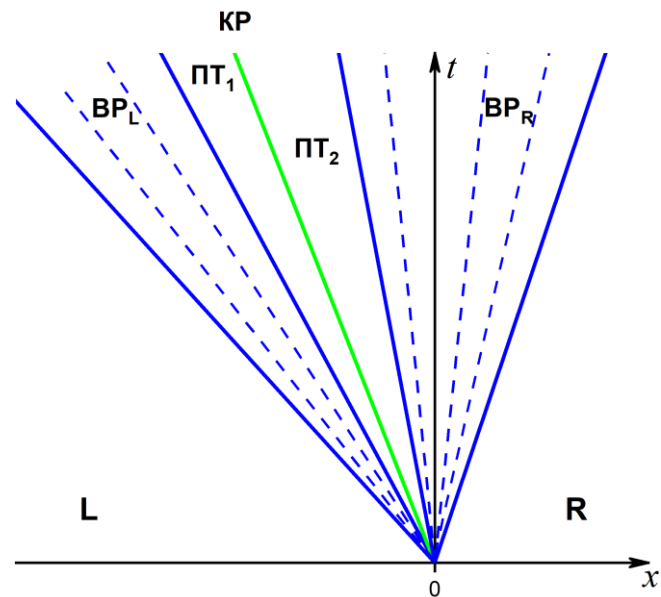
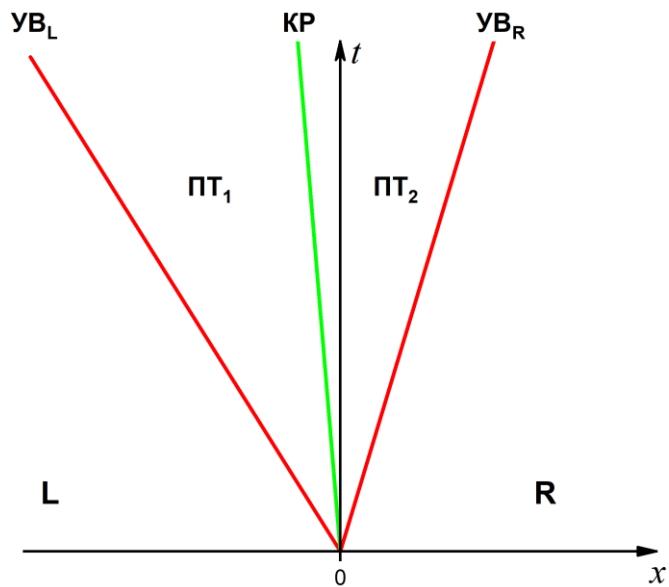
Задача не обладает характерным размером и характерным временем

Следовательно, имеет автомодельное решение, зависящее от переменной  $\xi = \frac{x}{t}$

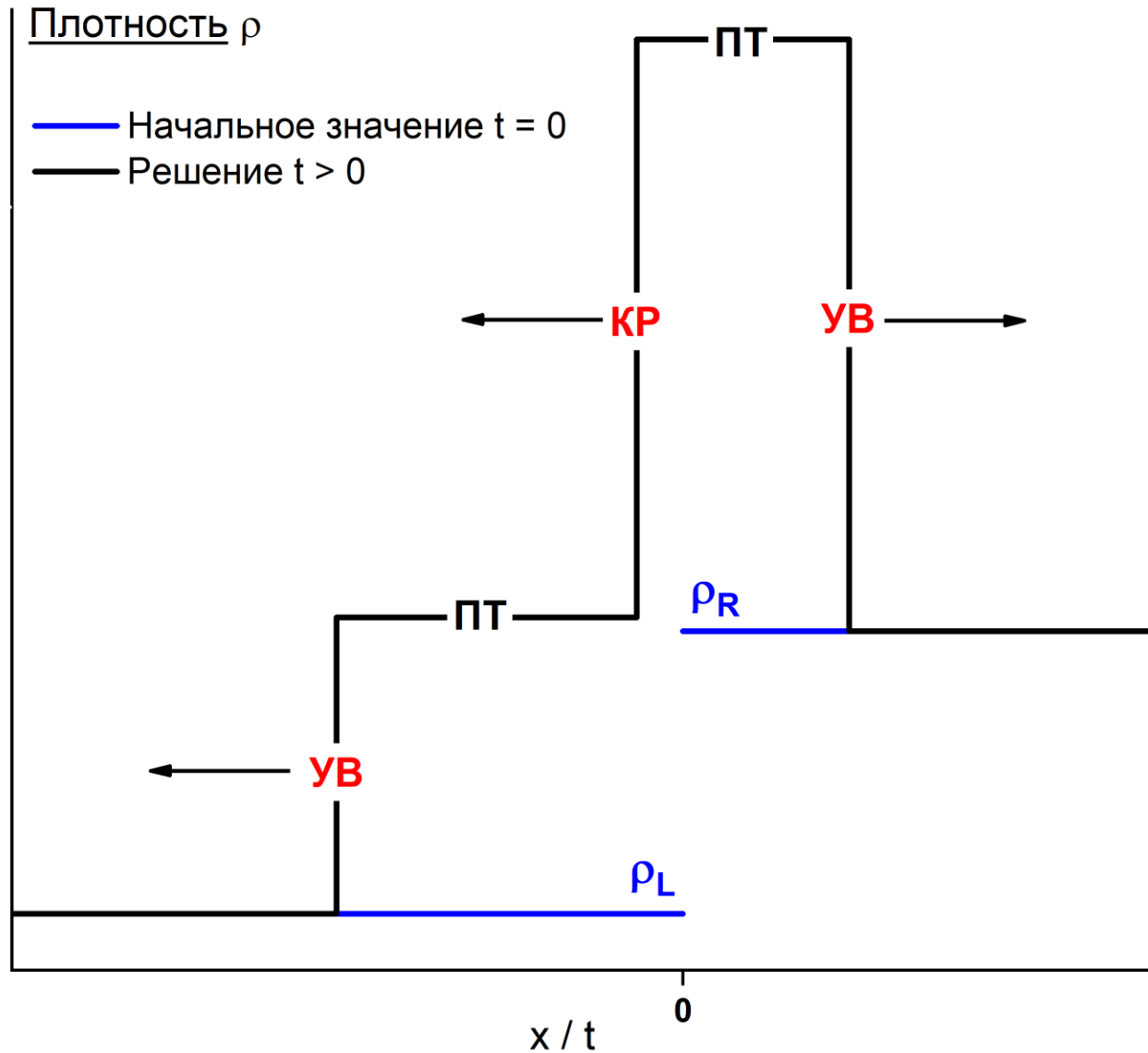
Решение состоит из

УВ — ударных волн, КР — контактного разрыва, ВР — волн разрежения,  
соединённых областями постоянного течения — ПТ

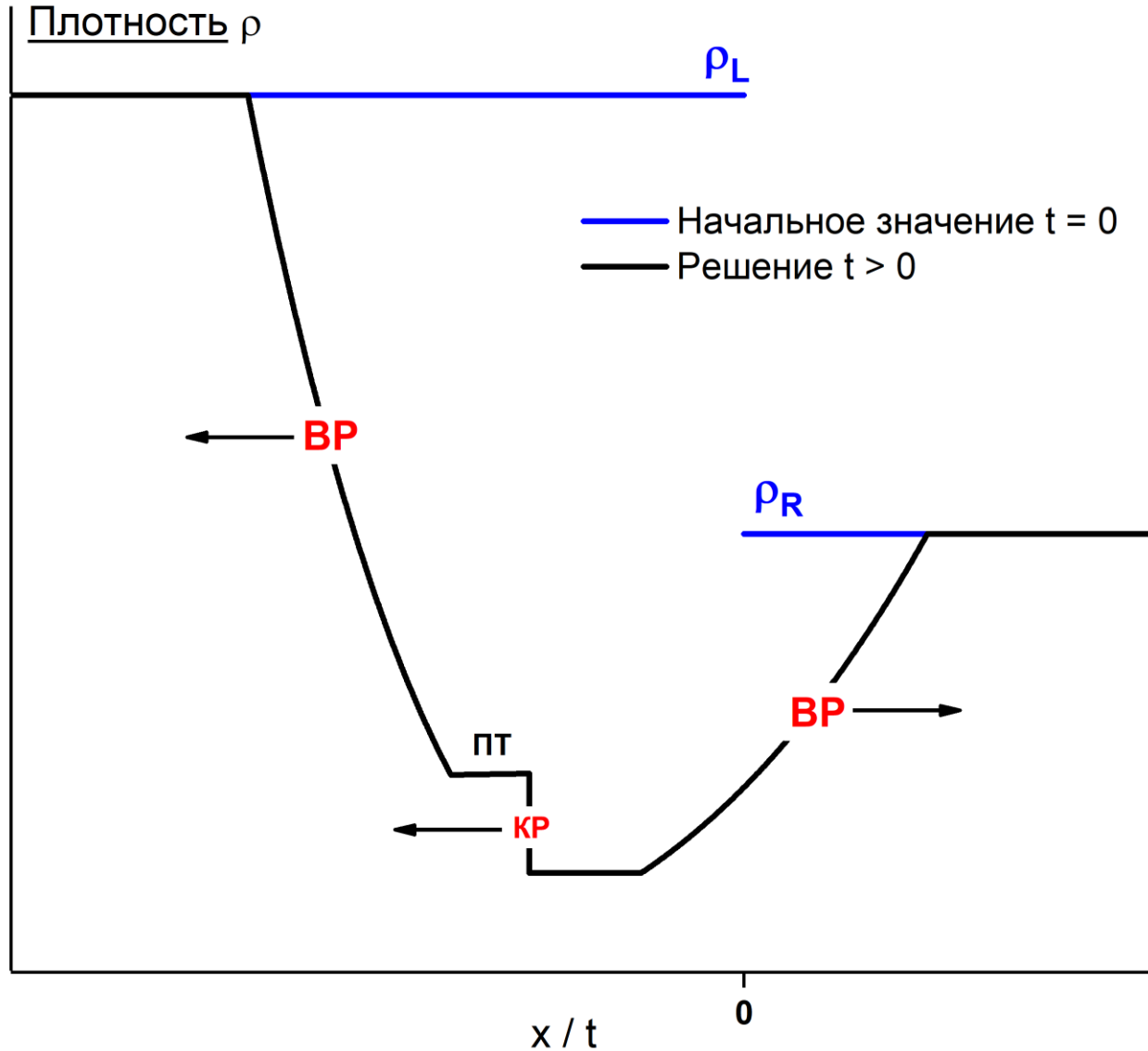
# Распад произвольного разрыва (задача Римана) Характерные конфигурации



# Распад произвольного разрыва (задача Римана) Решение УВ-УВ



# Распад произвольного разрыва (задача Римана) Решение ВР-ВР



# Распад произвольного разрыва (задача Римана) Решение ВР-УВ

