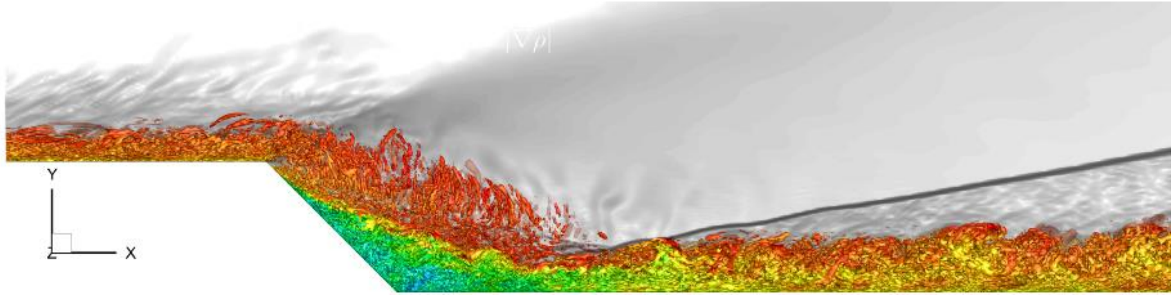
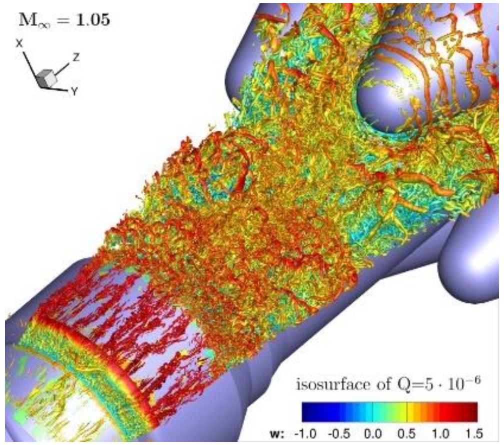
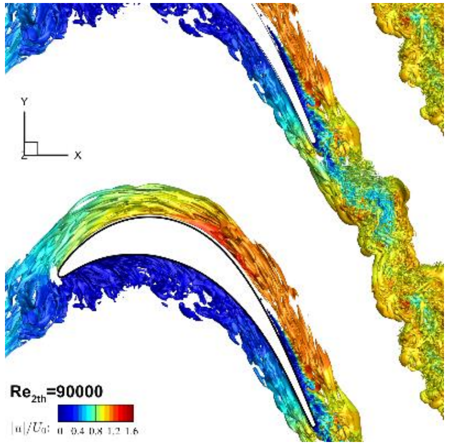
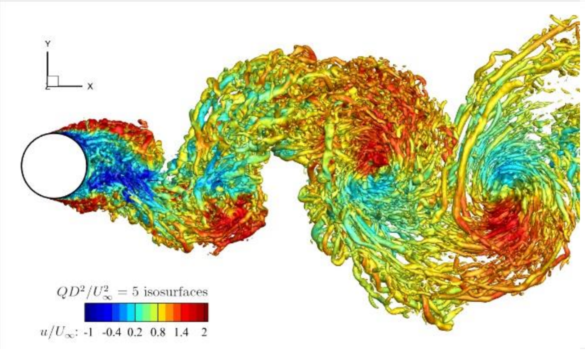
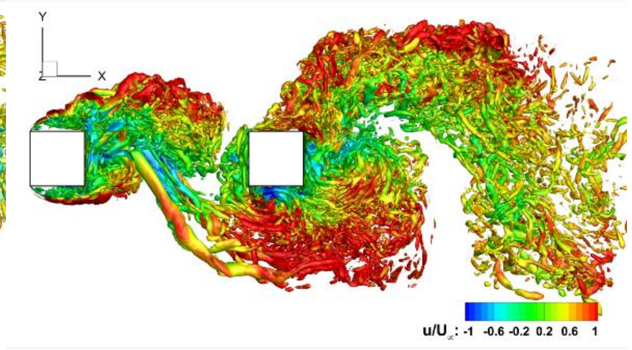
Моделирование турбулентных течений

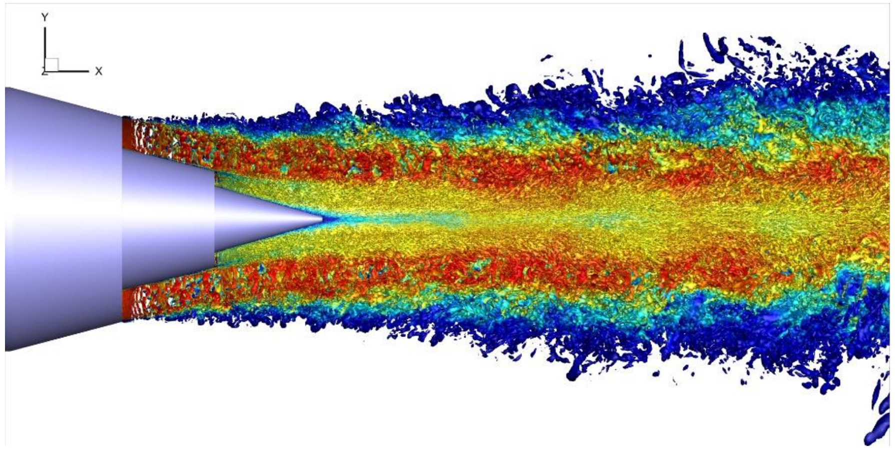




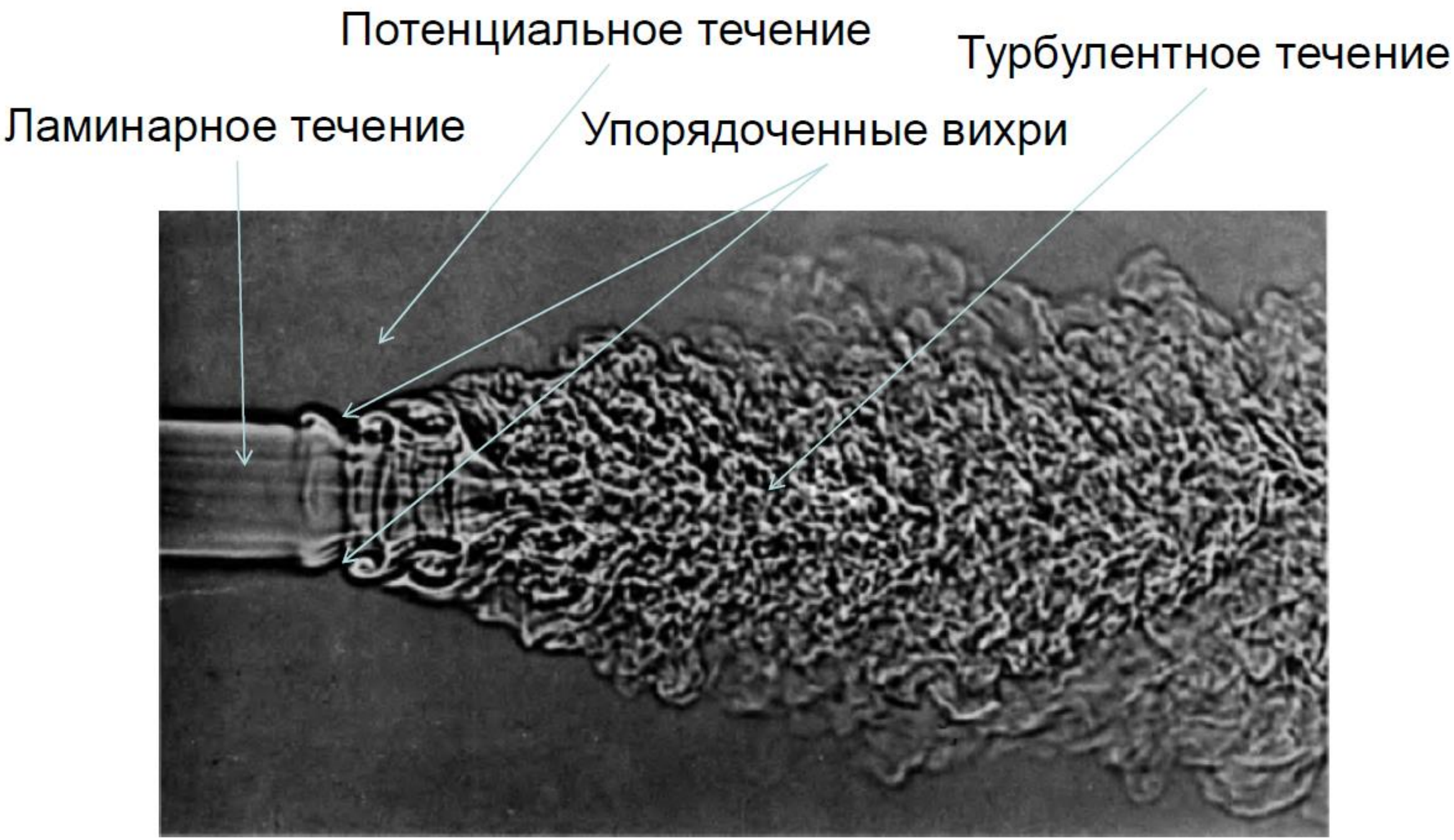






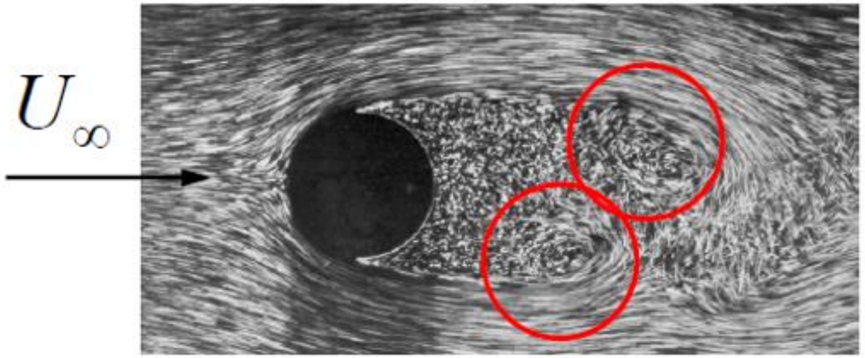


Ламинарные и турбулентные течения

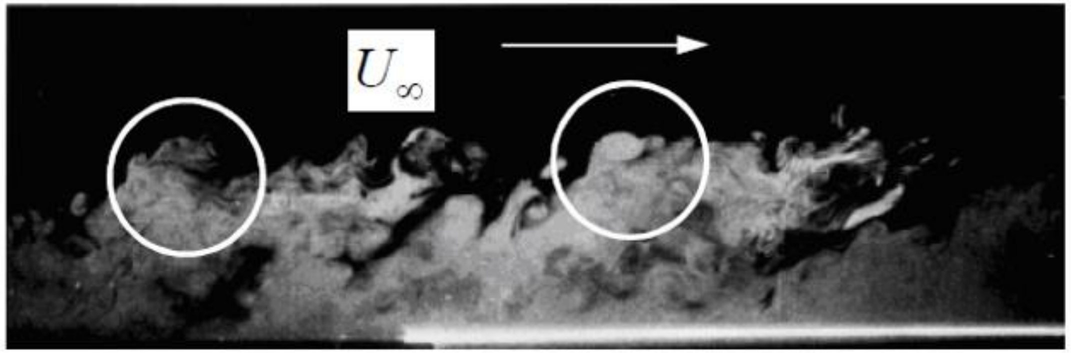


Течение в круглой затопленной струе

Разнообразие турбулентных течений



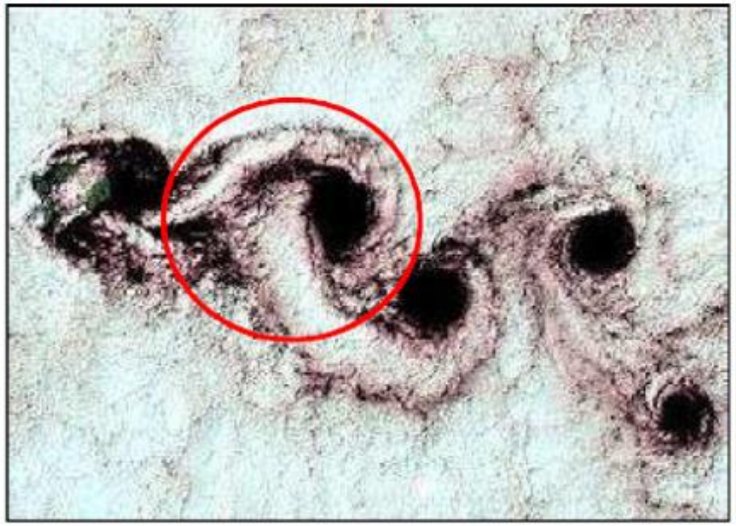
Обтекание цилиндра



Пограничный слой на плоской стенке

Извержение вулкана

Затопленная струя

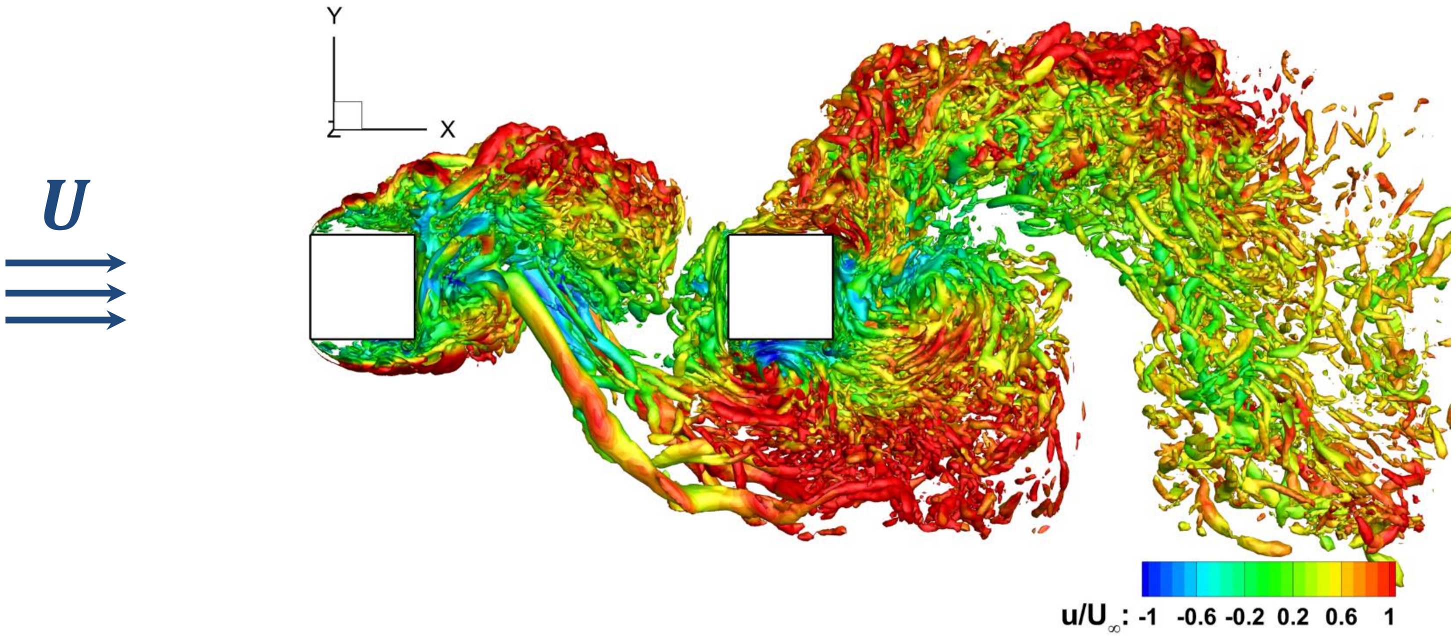


След за островом в океане

Галактические облака

Число Рейнольдса

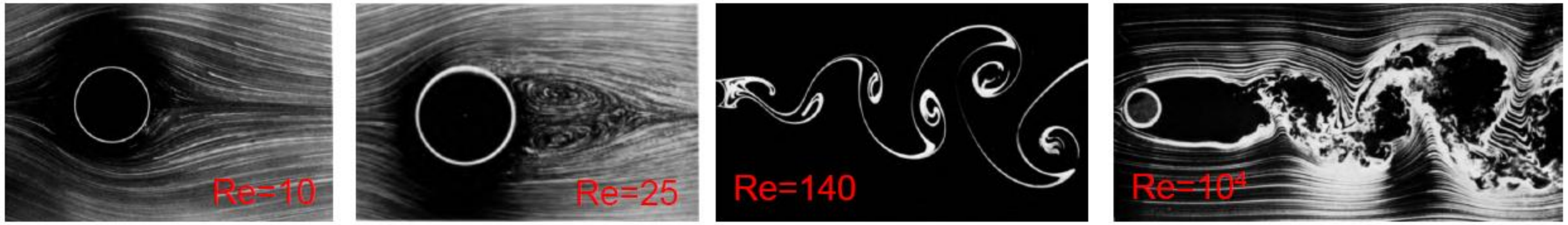
$$\mathrm{Re}_D = \frac{UD}{\nu}$$



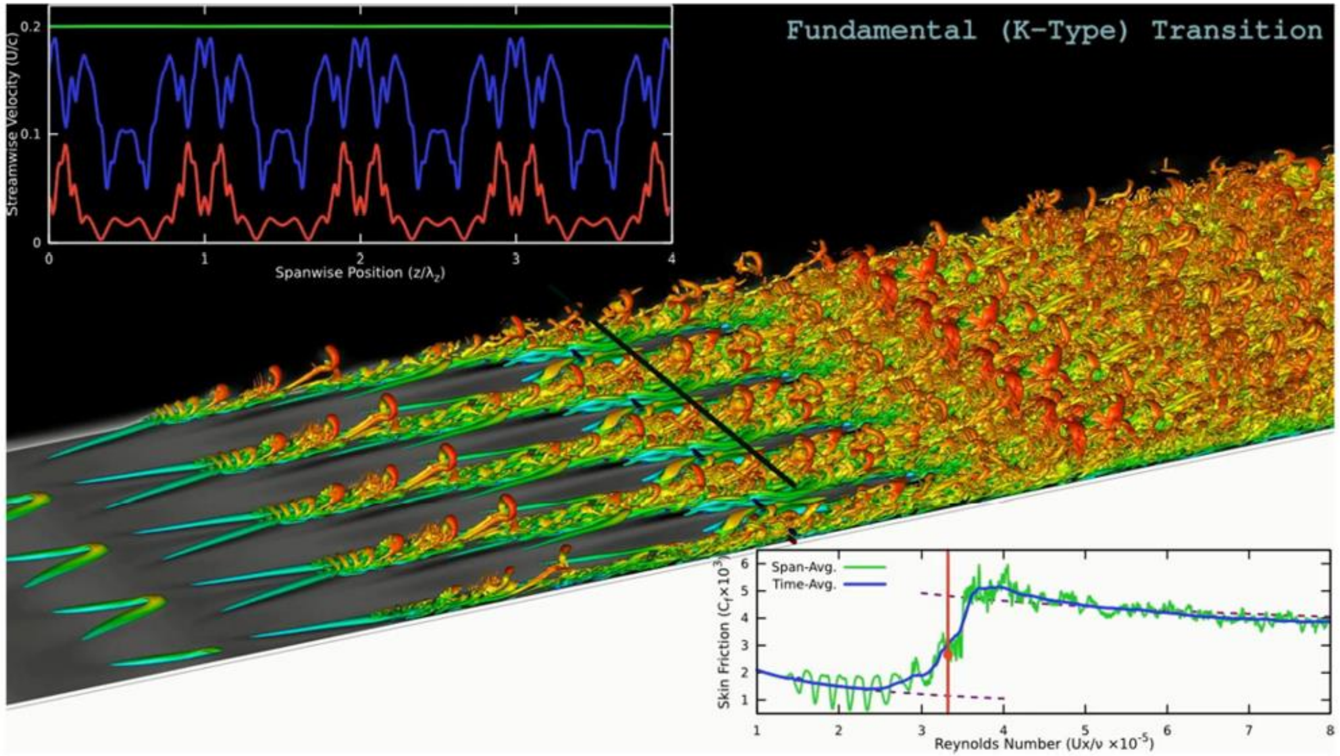
$U_\infty = 70$ м/с, D=0.04 м, Re_D=180000

Переход к турбулентности

Стационарное безотрывное | Стационарное отрывное | Нестационарное упорядоченное | Турбулентное



Изменение структуры течения при увеличении числа Рейнольдса



Признаки турбулентных течений

- Нерегулярность

  турбулентное течение нерегулярно, случайно и хаотично
- Диффузионность

  в турбулентном течении диффузия выше, чем в ламинарном
- Высокое число Рейнольдса
- Трехмерность
- Диссипативность

  энергия наиболее мелких вихрей диссипирует в тепло (Колмогоровский масштаб)
- Неразрывность

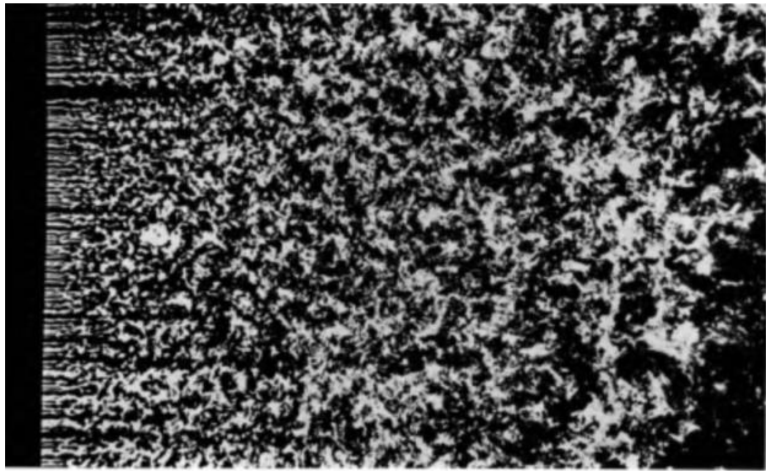
  размеры наиболее мелких вихрей намного больше длины свободного пробега

$$\eta_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle$ – местная скорость диссипации на единицу массы

$$\frac{L}{\eta_k} \sim \mathrm{Re}^{\frac{3}{4}}$$

ν – кинематическая вязкость



- Турбулентность существует на фоне «основного» движения
  например, на фоне однородного потока
- «Основное» движение можно выделить путем осреднения
  - по времени
  - по пространству
  - по ансамблю реализаций
  - по фазе
- Турбулентное течение можно разделить на осредненную (детерминированную) и пульсационную составляющие

$$u = \langle u \rangle + u'$$

- Турбулентные течения, у которых осредненная составляющая не зависит о времени, называются **стационарными**
- Кинетическая энергия турбулентности:

$$k_t = \frac{\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle}{2}$$

- Интенсивность турбулентности:

$$Tu \equiv I = \frac{u'}{U} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k_t}{U^2}}$$

$u' = \sqrt{[\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle]/3}$ $U = \langle |\mathbf{u}| \rangle$– средняя скорость потока

- Пульсации в точке можно разложить в ряд Фурье

$$u'(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(2\pi f_k t) + b_k \sin(2\pi f_k t)]$$

$B_k = B(f_k) = 2\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ - амплитуда

$E(f_k) = \frac{T}{2}[B(f_k)]^2$ - спектральная плотность:

$$2k_t = \langle u'^2 \rangle = \int_0^{\infty} E_1(f)df$$

- Трехмерный энергетический спектр:

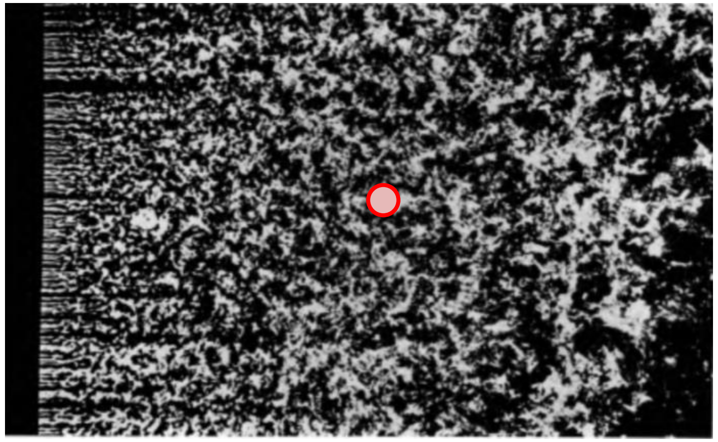
$E(k), k$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число (λ - длина волны)

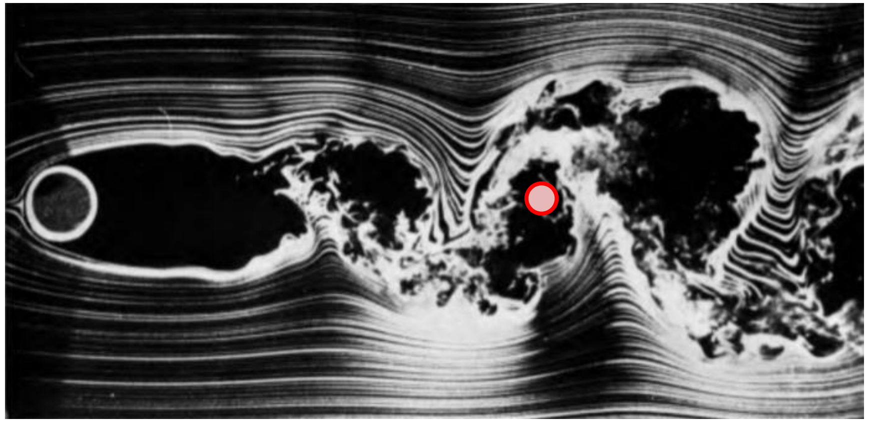
$$k_t = \langle u'^2 \rangle = \int_0^{\infty} E(k)dk$$

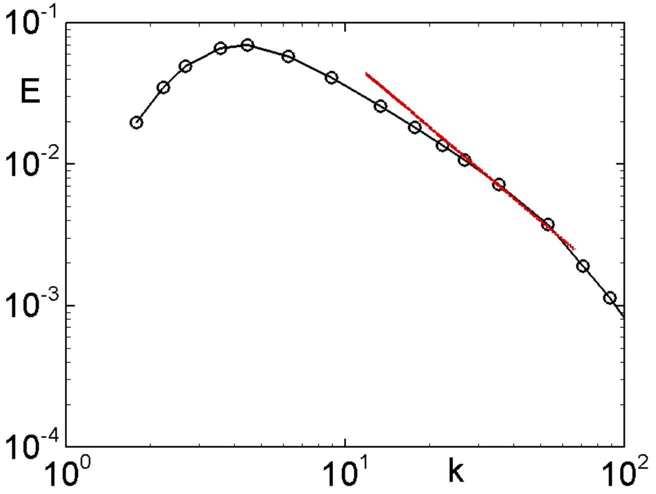
можно определить долю энергии турбулентных вихрей заданного диапазона размеров $[l_1, l_2]$: $k_t(l_1, l_2) = \int_{k_1}^{k_2} E(k)dk$ ($k_1 = \frac{1}{l_1}$, $k_2 = \frac{1}{l_2}$)

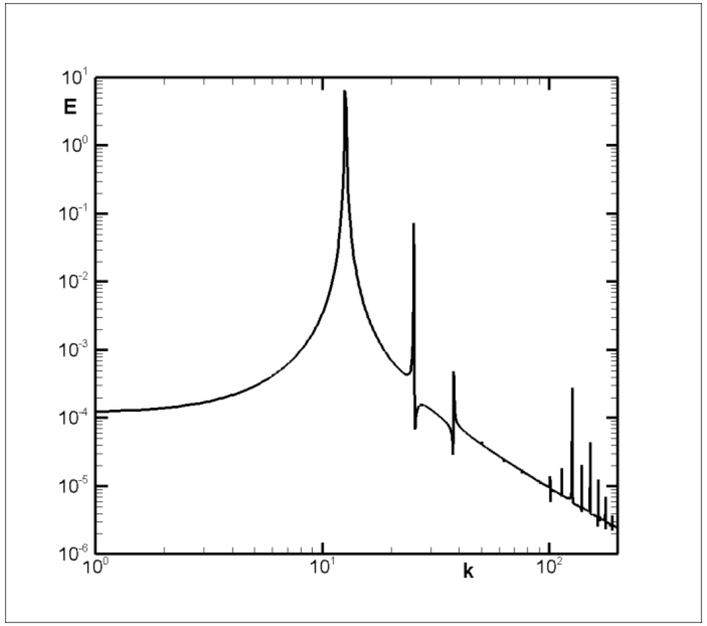
Энергетические спектры

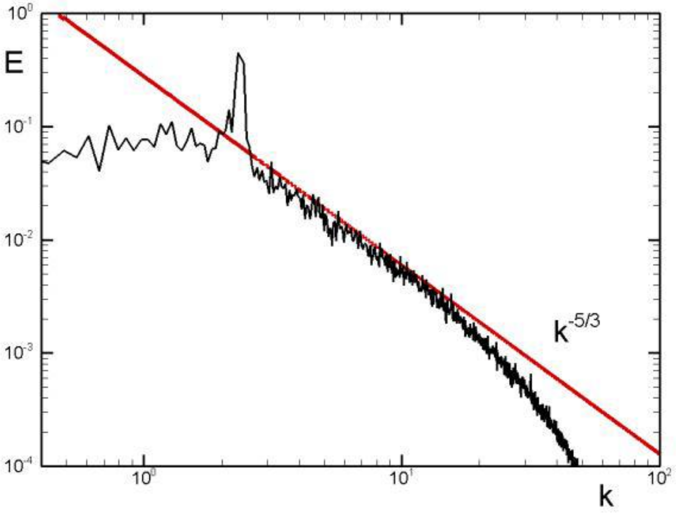
сплошной	линейчатый	смешанный



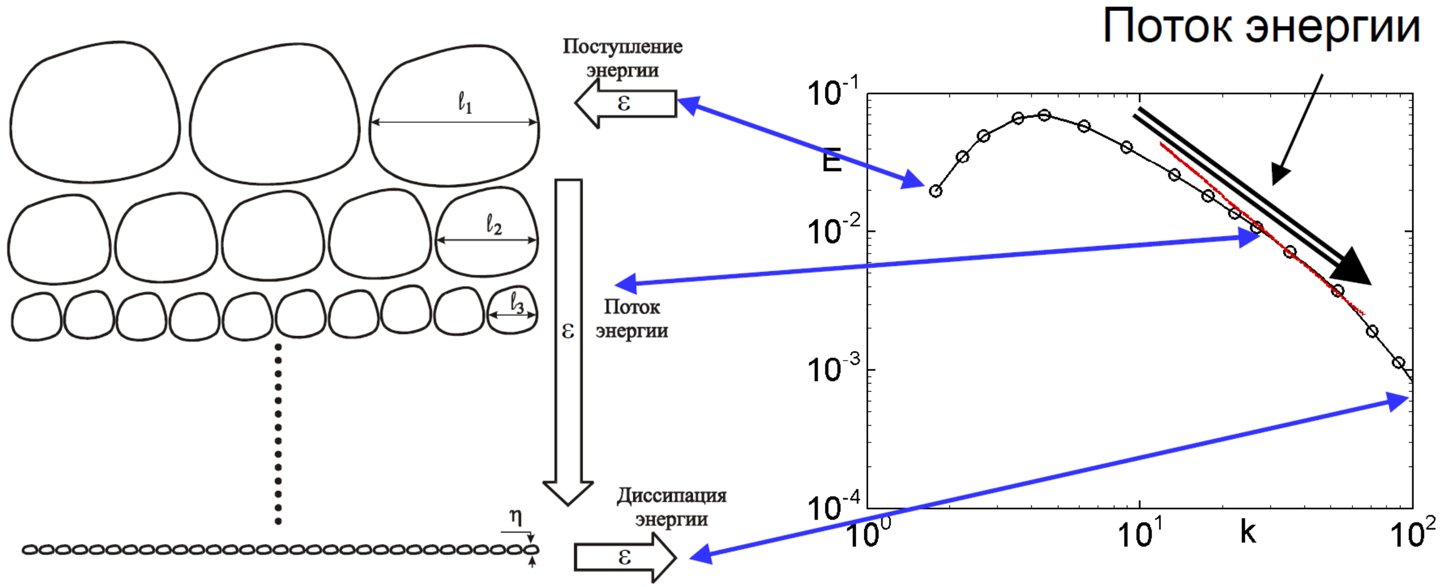


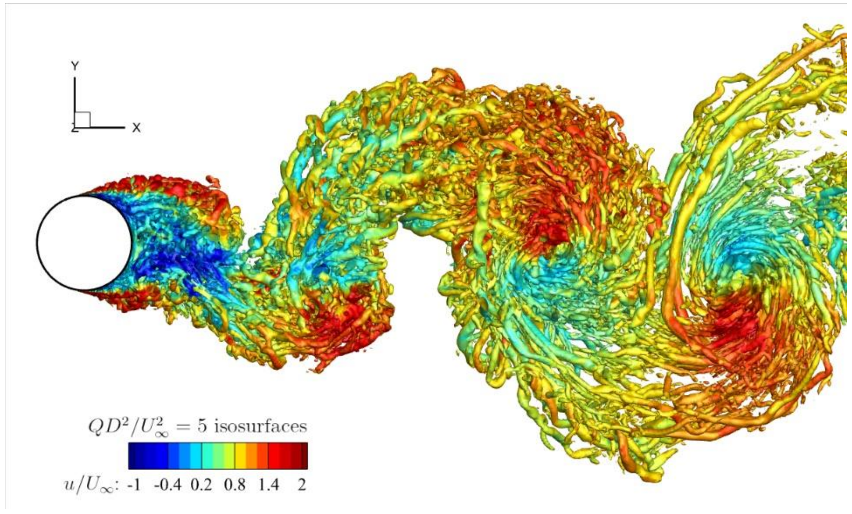






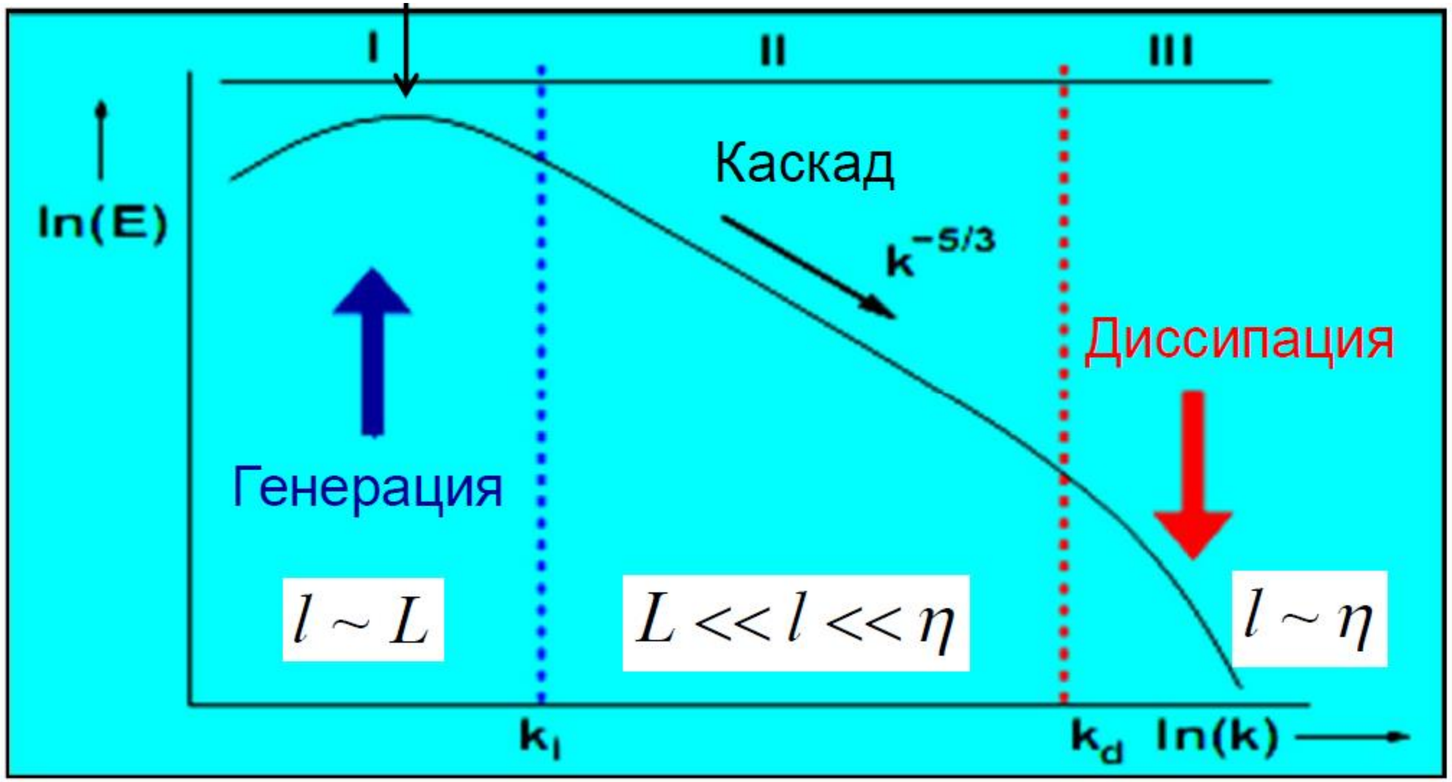
Преобразование энергии в турбулентных течениях

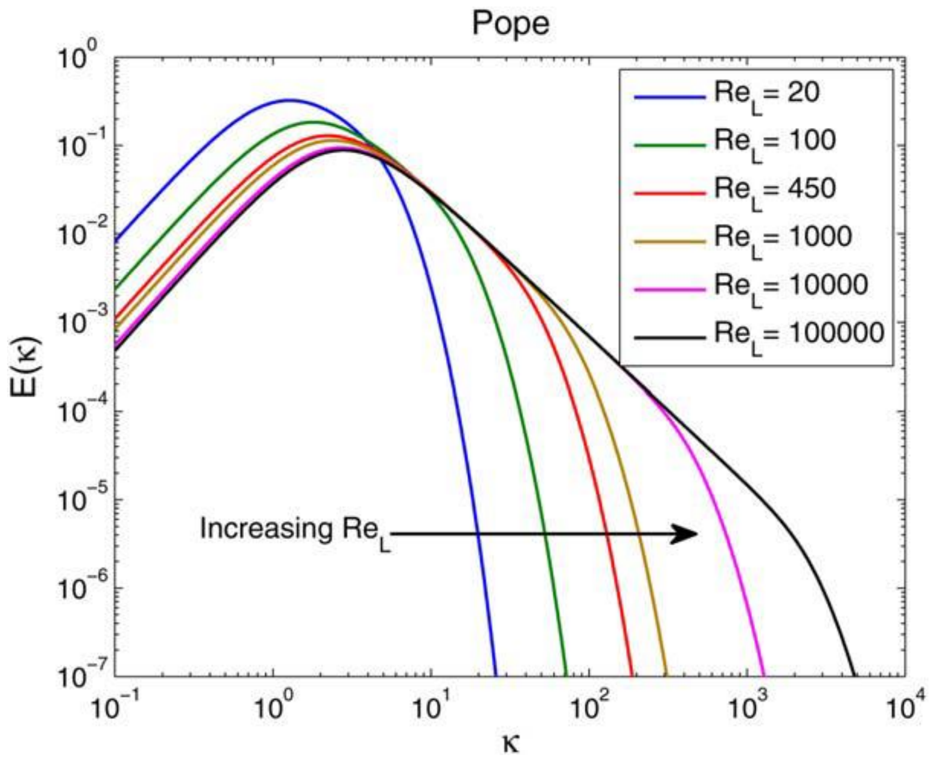




- энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным (когерентным, энергонесущим вихрям)
- последовательно передаётся всё более мелким и мелким вихрям («каскадный перенос)
- наиболее мелкие вихри («колмогоровские») диссипируют и передают энергию тепловому движению

Энергетический спектр

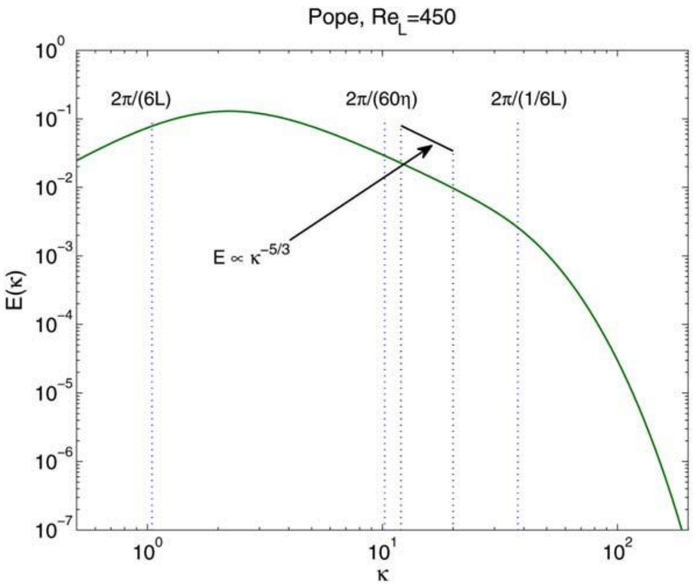


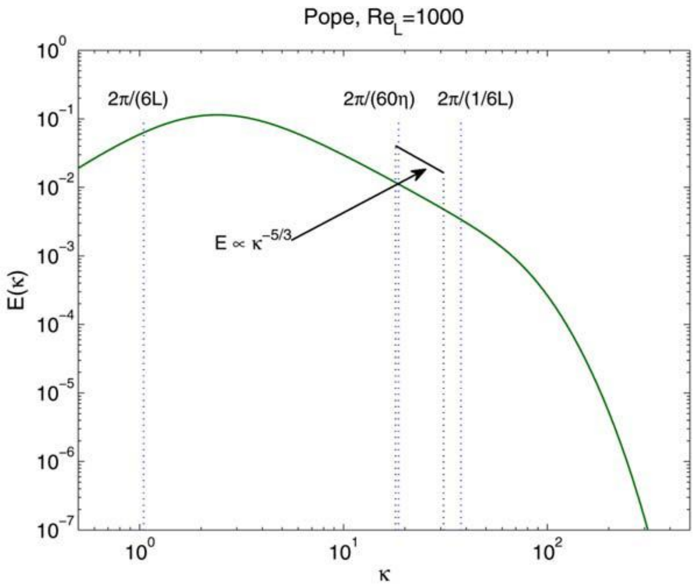


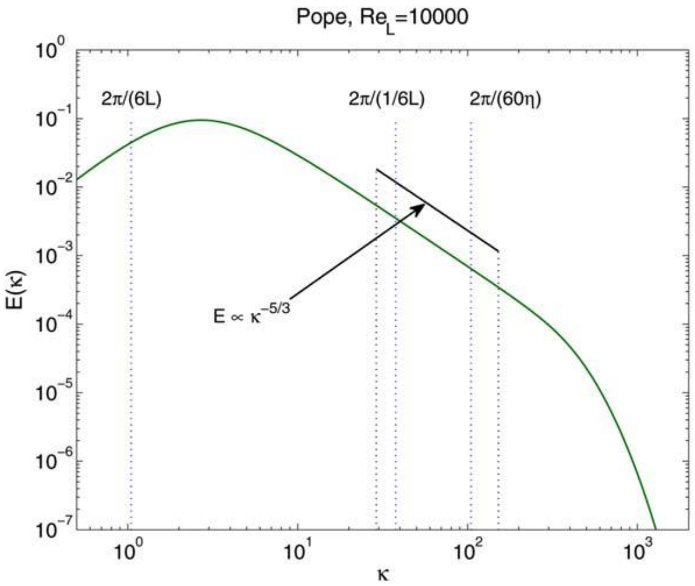
генерационный интервал | инерционный интервал | диссипативный интервал

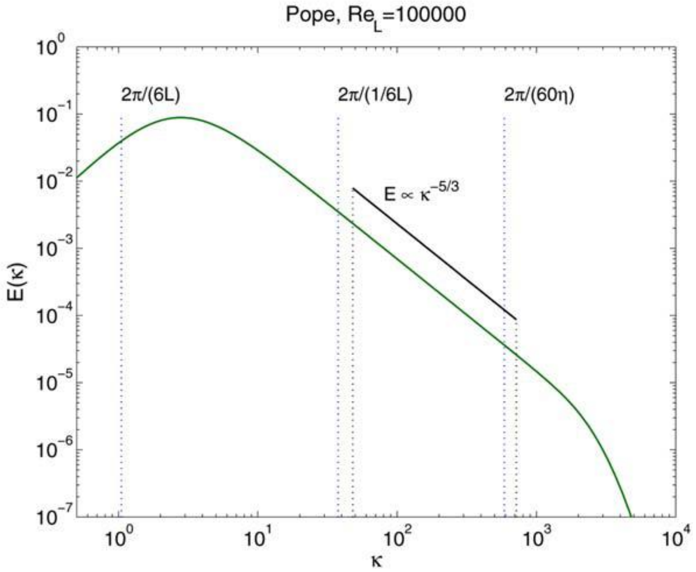
$$E(k) = C_k \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-5/3}$$ - закон «-5/3» Колмогорова

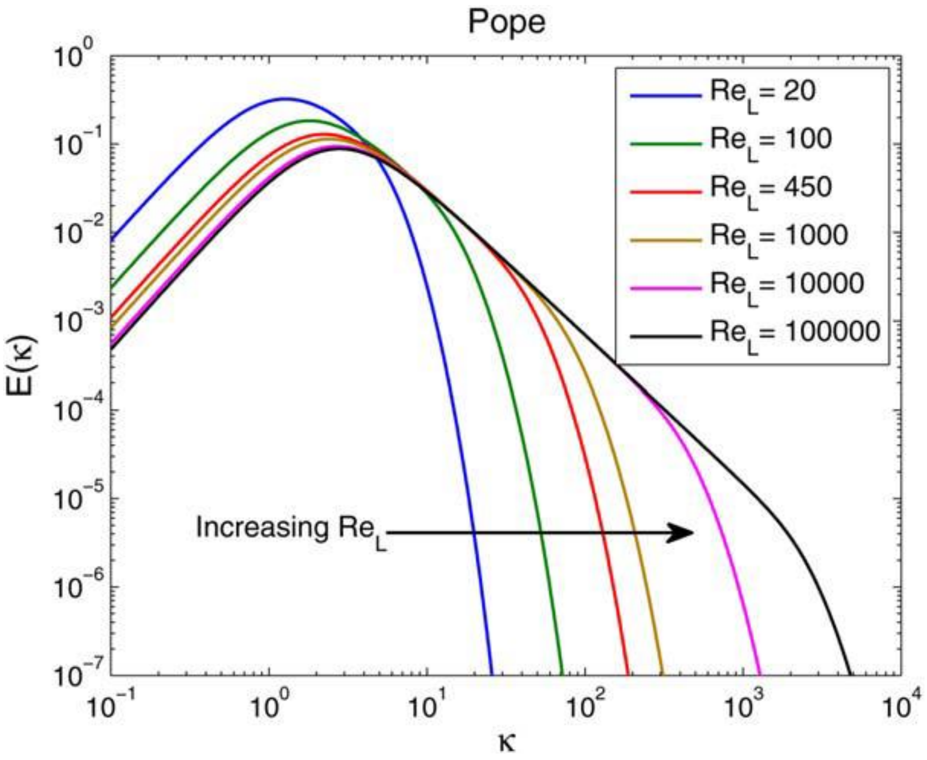
Энергетический спектр



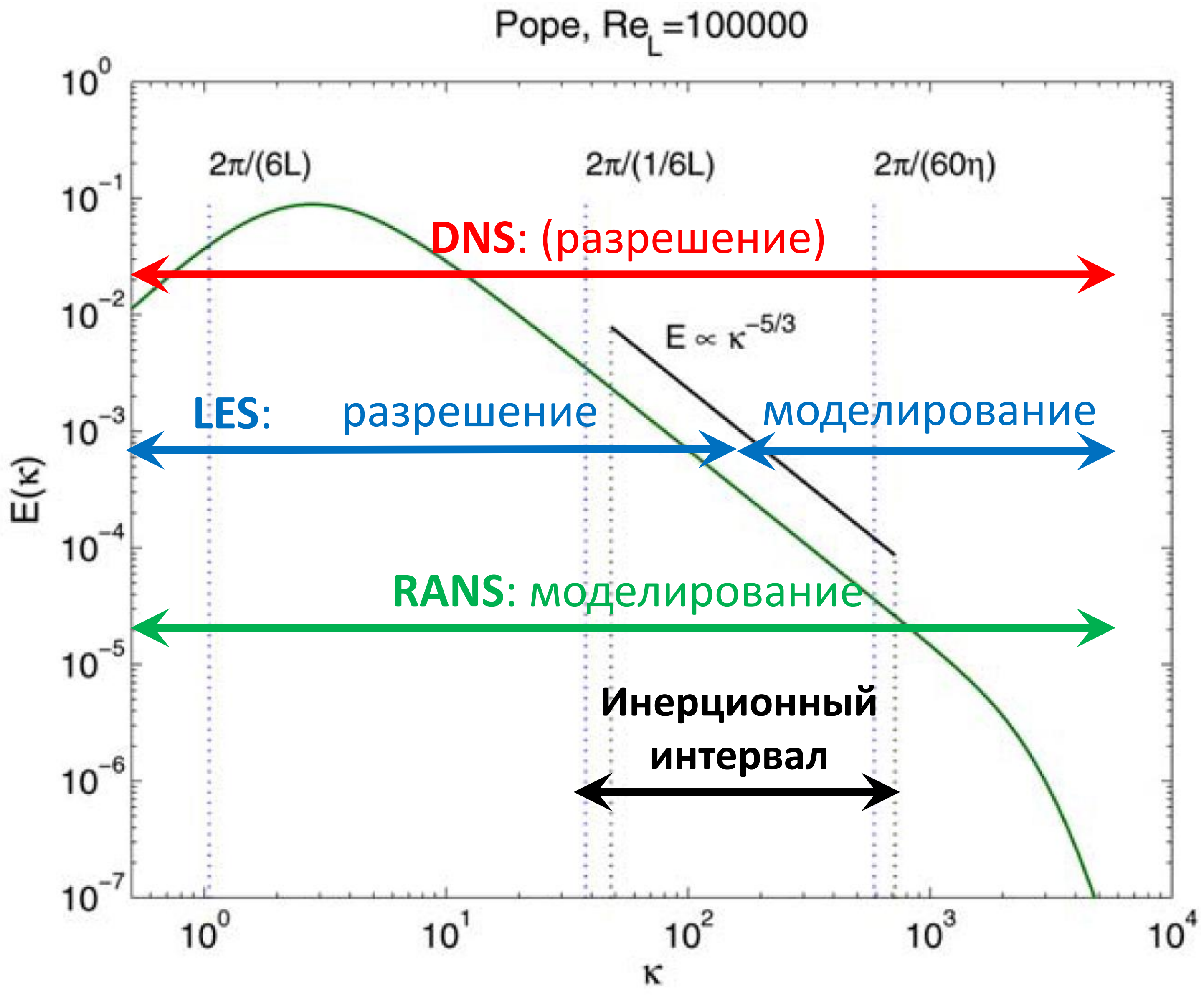


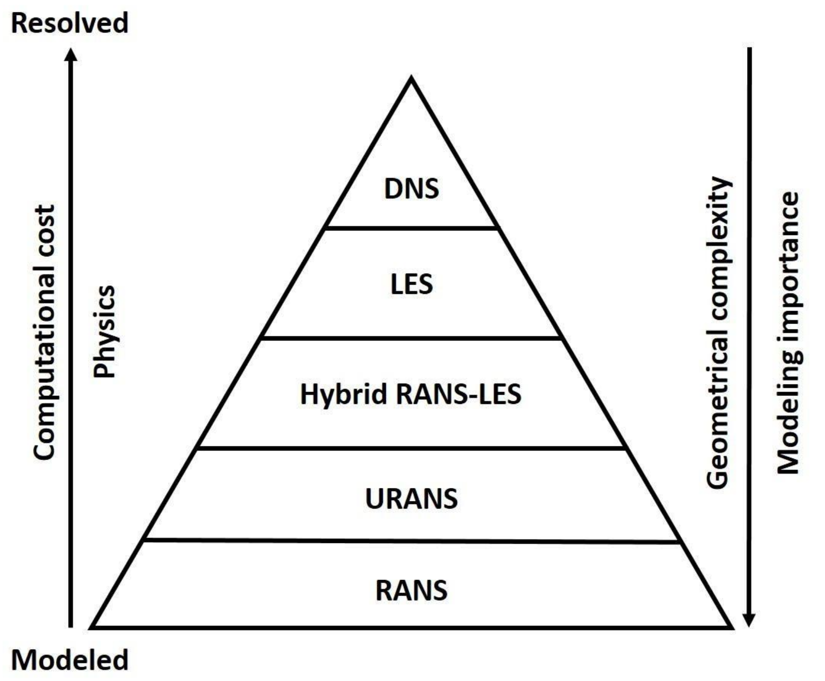




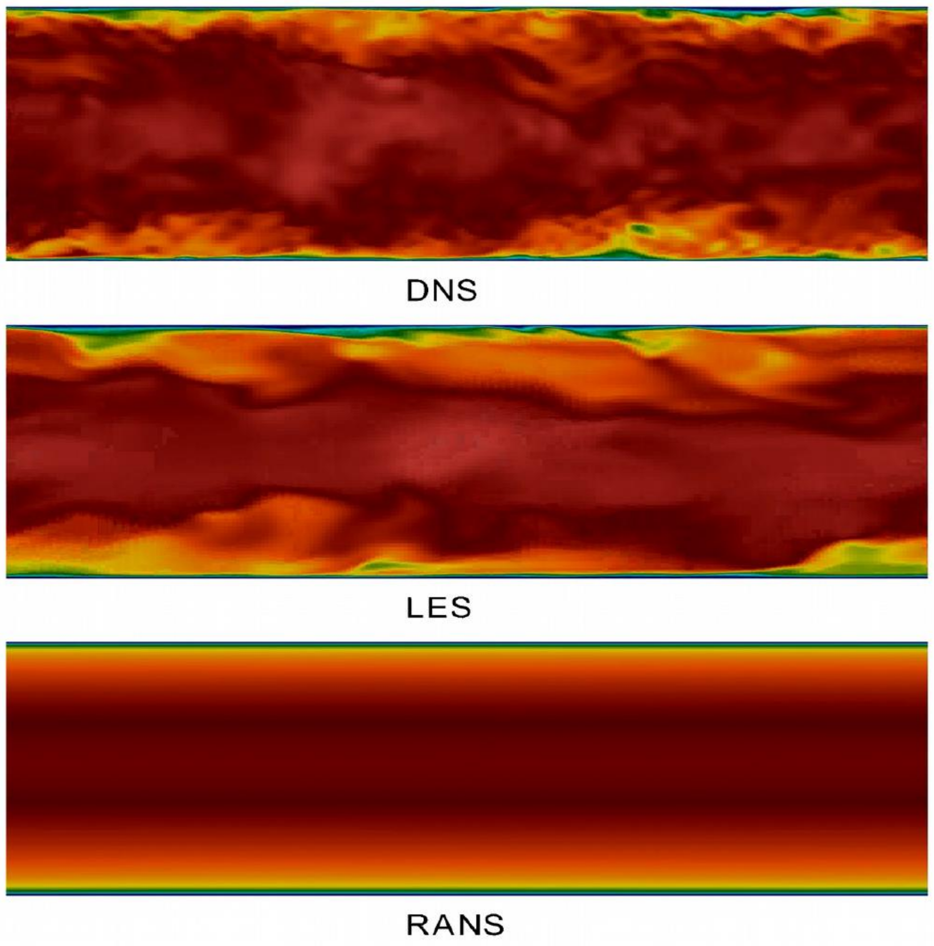


Классификация методов расчета турбулентных течений

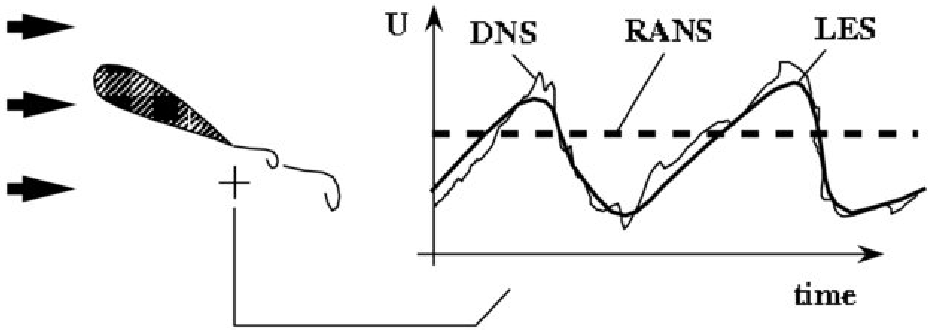


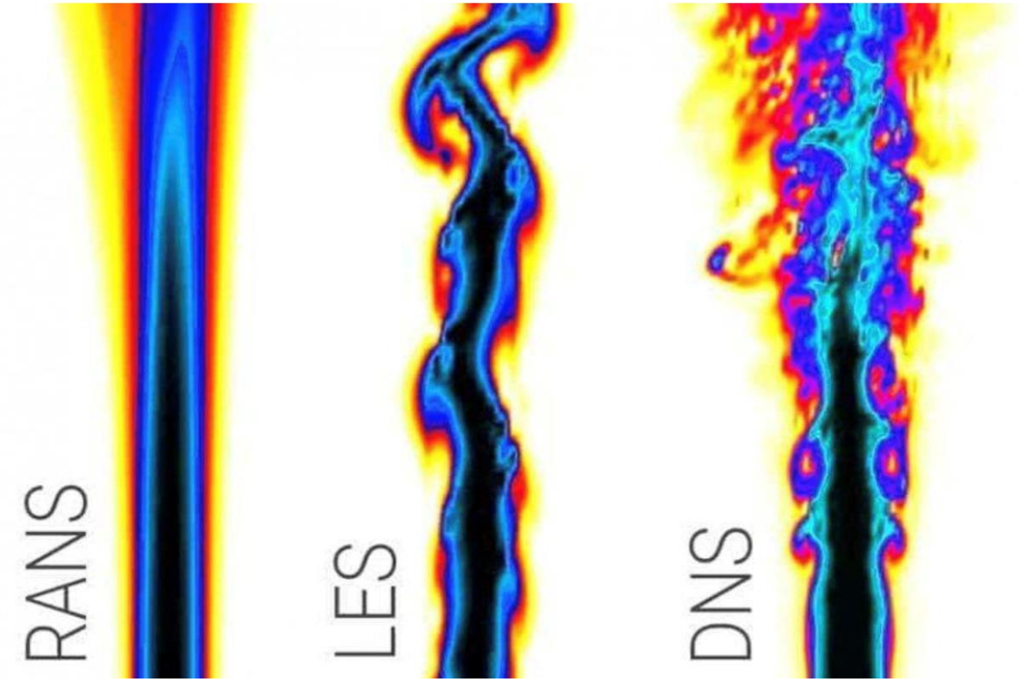


Пример DNS-LES-RANS



Развитое турбулентное течение в плоском канале

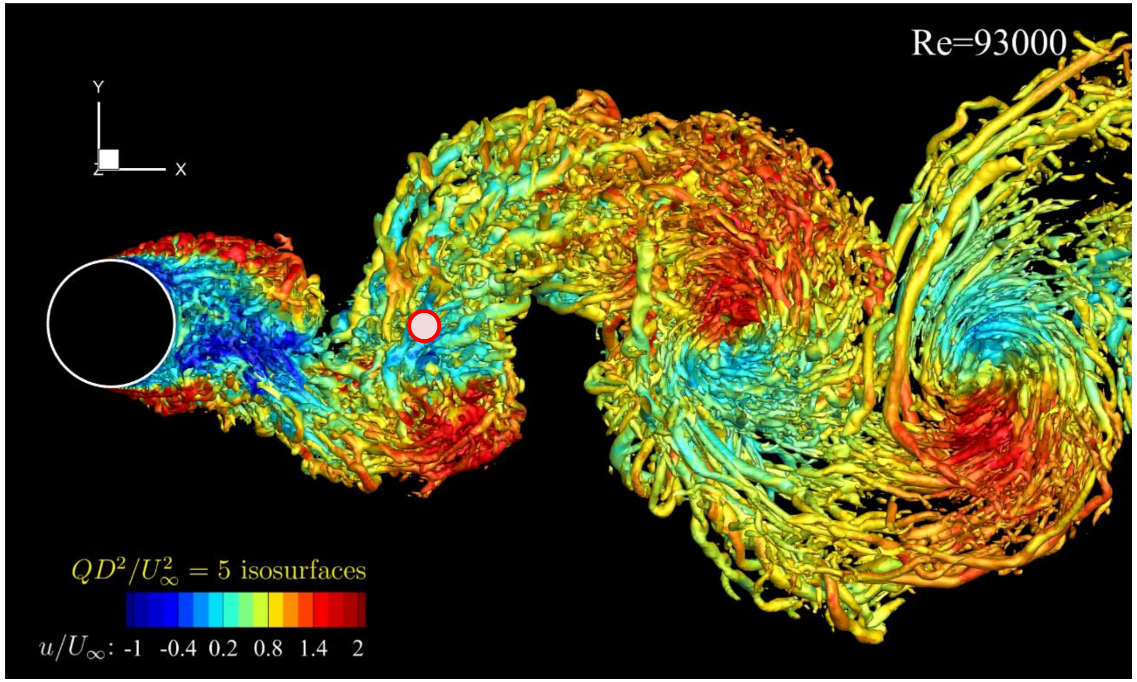


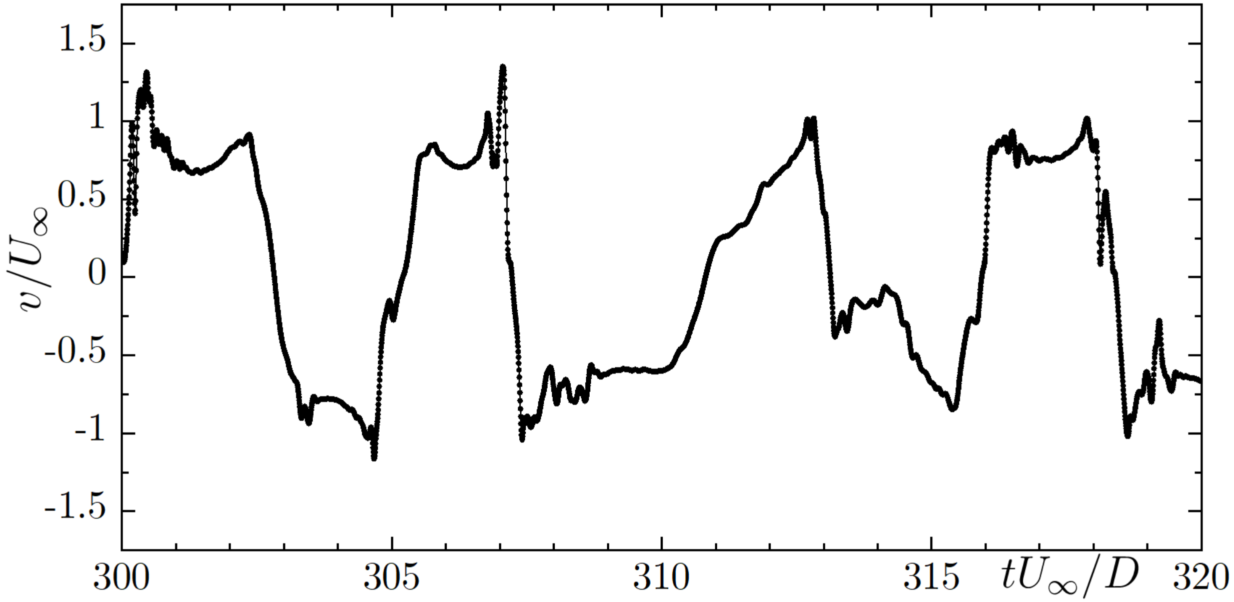


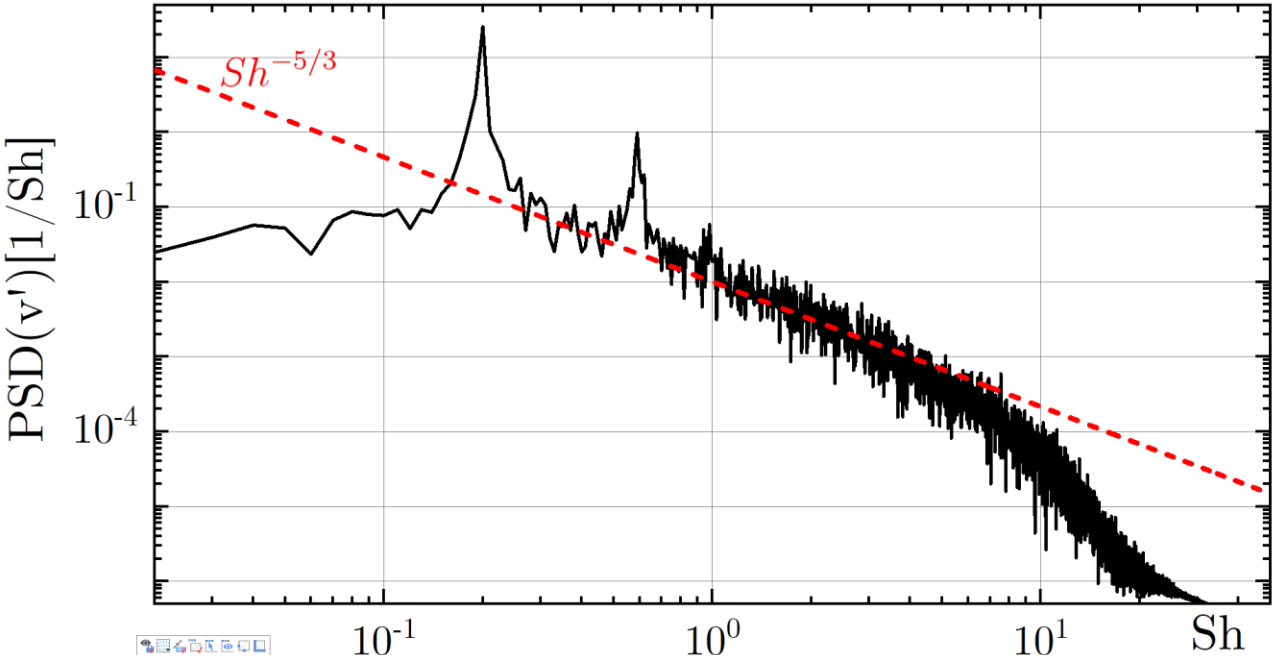
Струя

$$\Delta = 2.5 \cdot 10^{-2} D$$

$$\eta_k \sim 2 \cdot 10^{-4} D$$







- Записаны относительно мгновенных значений переменных

Уравнения сохранения импульсов для несжимаемого случая:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$t_{ij} = 2\mu S_{ij}$ - тензор вязких напряжений

$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ - тензор скоростей деформации

- Получаются из уравнений Навье-Стокса путем их осреднения
  - по ансамблю, по времени, по пространству
  - должны удовлетворять условиям Рейнольдса

$$\langle f+g\rangle=\langle f\rangle+\langle g\rangle \qquad \langle af\rangle=\mathrm{a}\langle f\rangle \qquad \left\langle\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle=\frac{\partial\langle f\rangle}{\partial s} \qquad \langle\langle f\rangle g\rangle=\langle fg\rangle$$

  - период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций
  - записаны относительно осредненных переменных

$$\langle f\rangle=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(t)dt$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\rho\langle u_i' u_j'\rangle\right)$$

$\tau_{ij}^T=\rho\langle u_i' u_j'\rangle$- (симметричный) тензор рейнольдсовых напряжений (6 независимых компонент)

след $\mathrm{tr}\left(\tau_{ij}^T\right)=\mathrm{tr}\left(\rho\langle u_i' u_j'\rangle\right)=\rho\langle u_i' u_i'\rangle=2k_t$- кинетическая энергия турбулентности

- На основе гипотезы Буссинеска (линейные модели, модели эффективной вязкости)

$$-\langle u_i' u_j{}' \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_t \delta_{ij}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad \tilde{p} = p + \frac{2}{3} k_t$$

  - модели с одним уравнением: Спаларта-Аллмараса, SA; Секундова
  - модели с 2 уравнениями: $k\varepsilon$, $k\omega$, $k\omega$ SST Ментера

- Модели Рейнольдсовых напряжений (RSM, Reynolds Stresses Model)
  - дифференциальные (могут быть получены из уравнений Навье-Стокса с использованием осреднения по Рейнольдсу)

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_j'} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j'} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ijk} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

  - алгебраические (ARSM): явные (EARSM) и неявные

Как строятся современные модели турбулентности

- 1, 2,... уравнения переноса с источниками

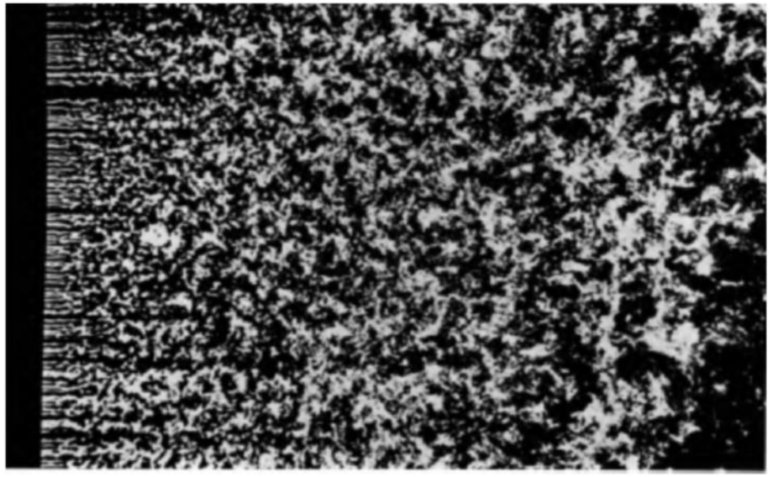
$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j A}{\partial x_j} = P - D + Diff + \cdots$$

P – производство

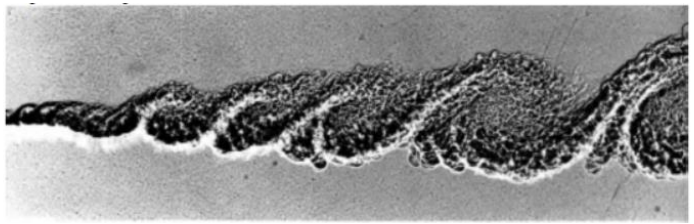
D – диссипация

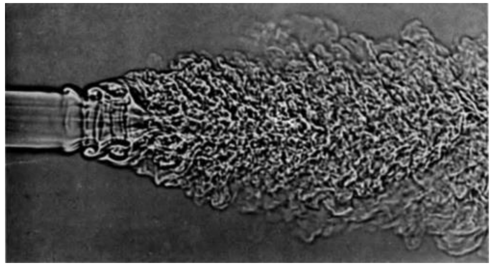
A – k, ε (KE) k, ω (KO, SST,...) $\tilde{\nu}$ (SA) γ

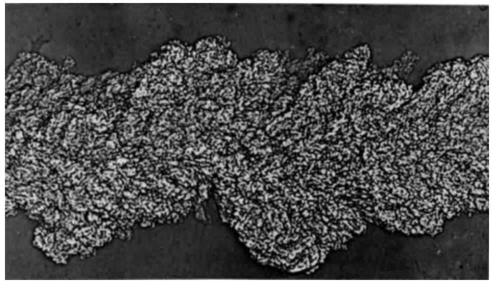
- Основные закономерности: канонические турбулентные течения, эксперимент, DNS



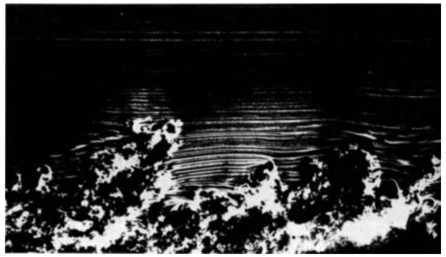
Однородная изотропная турбулентность

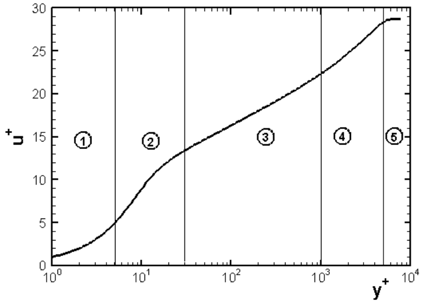






Свободные сдвиговые течения



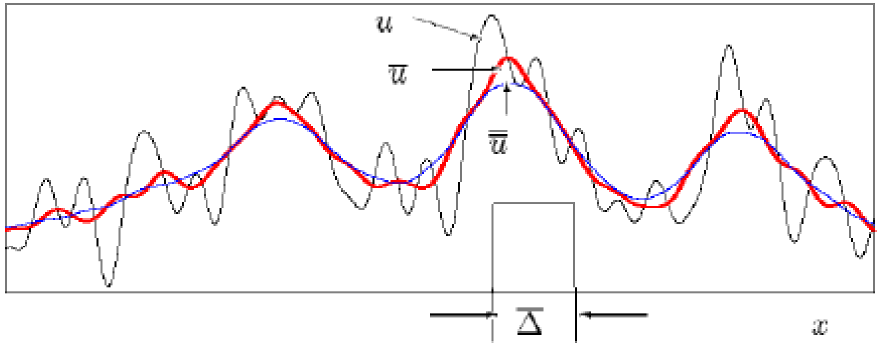


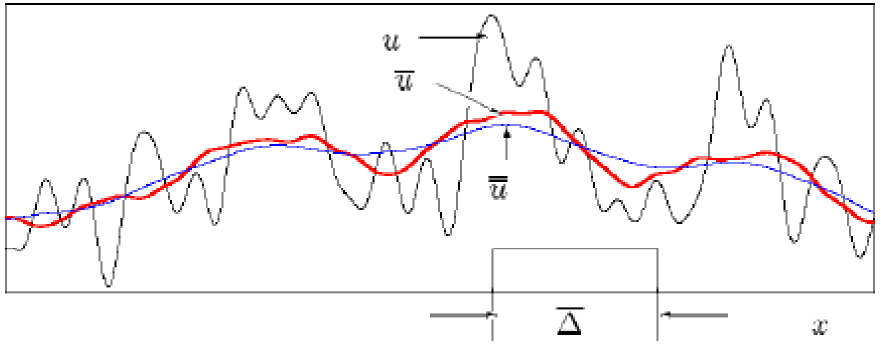
Пограничный слой

- Получаются из уравнений Навье-Стокса путем их фильтрации по пространству

$$\bar{f}(r,t)=\int_D G(r-r',\bar{\Delta})f(r',t)dr'^3$$

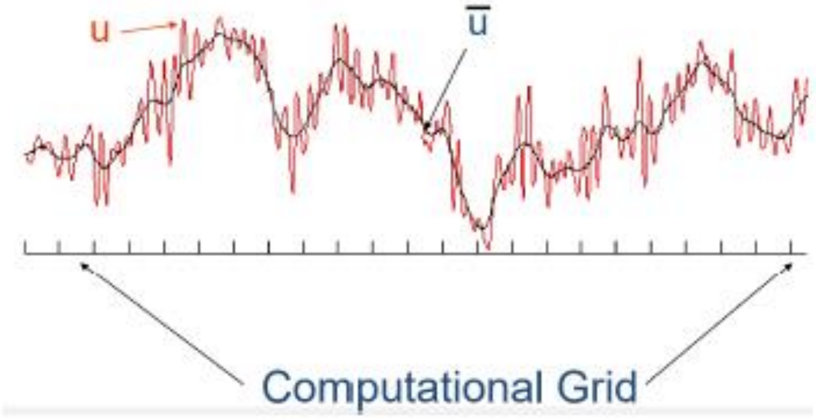
фильтр Гаусса: $G(x-x',\bar{\Delta})=\sqrt{\frac{6}{\pi\bar{\Delta}^2}}\cdot\exp\left[-6\left(\frac{|x-x'|}{\bar{\Delta}}\right)^2\right]$





$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\tau_{ij}\right)$$

$\tau_{ij}=\overline{u_i u_j}-\overline{u_i}\,\overline{u_j}$ – тензор подсеточных напряжений



Подсеточная модель Смагоринского

- Наиболее часто используется при проведении LES
- Основана на гипотезе Буссинеска (использует подсеточную вязкость)

$$\nu_t = \left(C_s \overline{\Delta}\right)^2 \left|\overline{S}\right| \quad \overline{\Delta} = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = Vol^{1/3} \quad \left|\overline{S}\right| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}$$

Выполнение закона «-5/3», $\nu_t \sim \varepsilon^{1/3}\Delta^{4/3}$

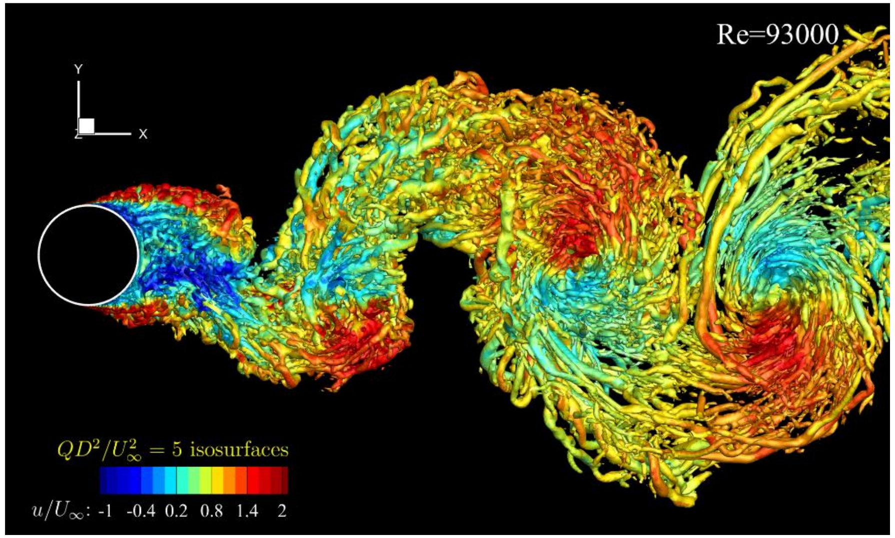
- Константу можно оценить из энергетического спектра Обухова

$$E(k) = C_k \varepsilon^{-2/3} k^{-5/3} \quad C_k \approx 1.4 \div 2.2 \quad \Rightarrow \quad C_S = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3C_k}\right)^{3/4} \approx 0.13 \div 0.18$$

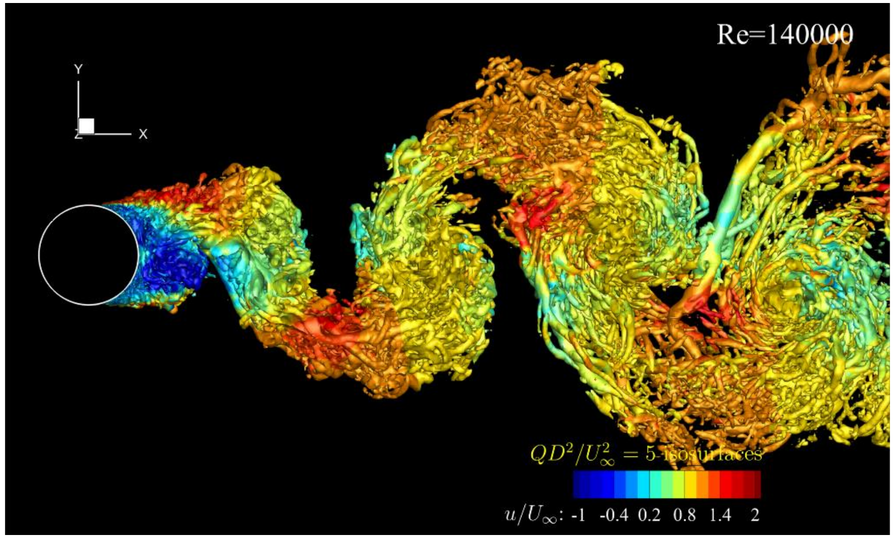
- Калибровка константы задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности (DIHT) (C_s≈0.2)

Разрешаемые и моделируемые масштабы в рамках LES

$\eta_k \sim 2 \cdot 10^{-4} D$

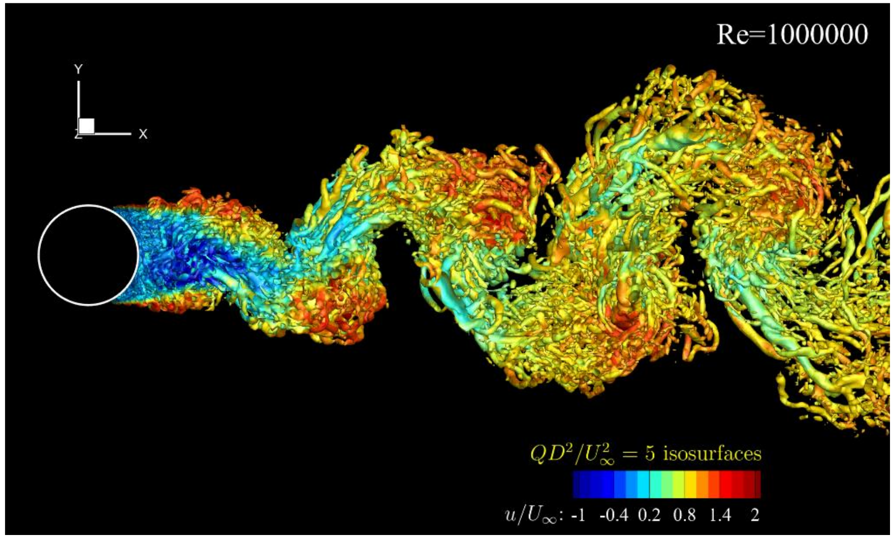


$\eta_k \sim 1.4 \cdot 10^{-4} D$



$\Delta = 2.5 \cdot 10^{-2} D$

$\eta_k \sim 3 \cdot 10^{-5} D$



$\eta_k \sim 1.9 \cdot 10^{-5} D$