

Лекция 1.2

Линейное уравнение переноса

Абалакин Илья Владимирович

28 февраля 2022 года

В предыдущих лекциях была получена система уравнений, которое при эйлеровом подходе можно записать как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot E \mathbf{u} + \nabla \cdot p \mathbf{u} = 0$$

(A.13), (A.14)

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \rho \mathbf{u}}_{\mathbf{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = 0} + \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E + E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot p \mathbf{u} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E = -E \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot p \mathbf{u} \end{cases}$$

Упрощение 1

При предположении $\nabla p = 0$ (не физичным!!!) и $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

система уравнений Эйлера преобразуется в систему переноса скалярных и векторной величин.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad (1)$$

Уравнение переноса, характеристики

Упрощение 2. Будем предполагать, что скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

Пусть в пространстве переменных $(\mathbf{x}, t)$ — фазовом пространстве задана кривая в параметрической форме

$\mathbf{x}(t): \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \\ t = s. \end{cases}$ Определим производную функции $f(\mathbf{x}, t)$ вдоль кривой $\mathbf{x}(t)$

$$\frac{d}{ds} f(\mathbf{x}(s), s) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla f \quad (2)$$

Сопоставим уравнение (1) $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0$ и производную (2):

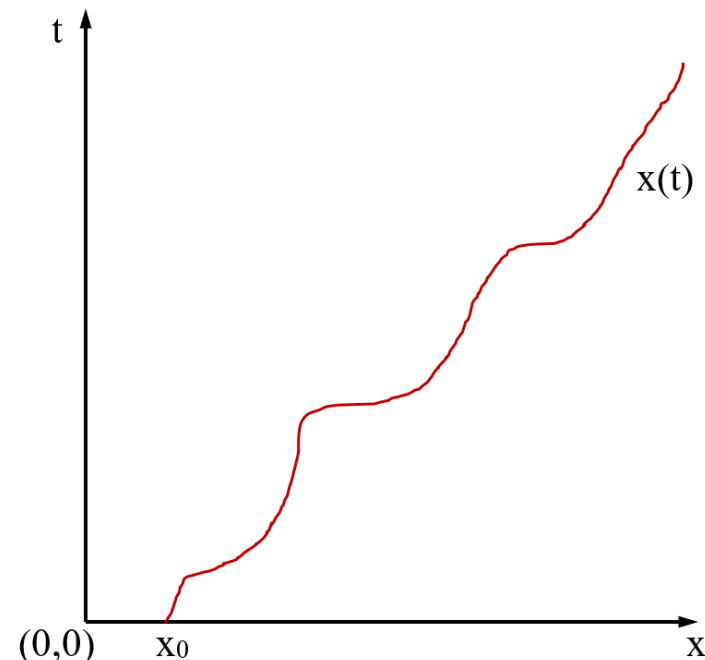
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad (3) \Rightarrow \text{функция } f(\mathbf{x}, t) \text{ постоянна вдоль кривой } \mathbf{x}(t): f(\mathbf{x}_s, t_s) = f(\mathbf{x}_0, 0), \text{ где точки } (\mathbf{x}_0, 0), (\mathbf{x}_s, t_s) \in \mathbf{x}(e)$$

Кривая $\mathbf{x}(t)$ называется *характеристикой* уравнения (1) и определяется уравнением (УХ): $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} \quad (4)$

Упрощение 3. Пусть скорость $\mathbf{u}$ постоянна.

Пусть $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, тогда решение УХ (4) есть *прямые* в фазовом пространстве $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}t$.

Пусть $f(0) = g(\mathbf{x}_0)$, тогда решение уравнения (3) — $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}_0)$ или $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$.



Упрощение 4. Будем рассматривать одномерное по пространству уравнение со скоростью $u > 0$.

Начальная задача

Начальная задача для линейного уравнения переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ f(x, 0) = g(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

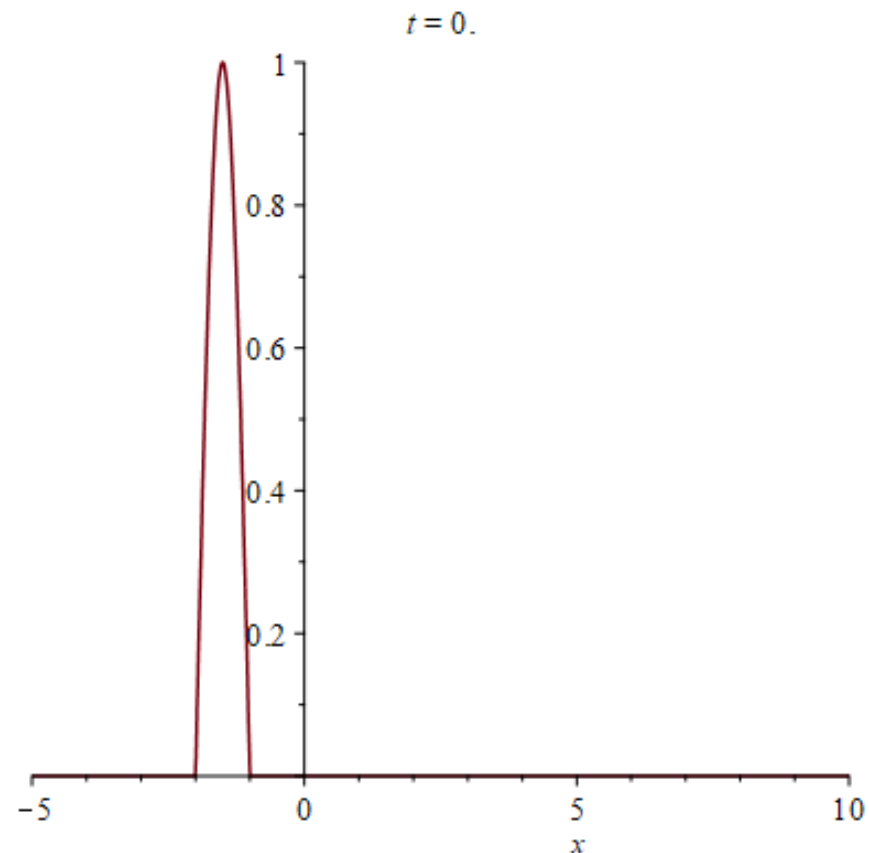
имеет решение $f(x, t) = g(x - ut)$, которое постоянно вдоль характеристик $x = ut + x_0$.

Пример:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \sin(\pi x) & -2 \leq x \leq -1, \quad u = 2 \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$

Иногда заменяют задачу без граничных условий на задачу, определённую на отрезке $x_0 \leq x \leq x_1$ с периодическими граничными условиями: $f(x_0, t) = f(x_1, t)$

При этом предполагается периодическое продолжение начальной функции $g(x)$, определённой на отрезке, на всю числовую ось.



Начально-краевая задача (1)

Для уравнения линейного переноса с $u > 0$ можно поставить краевую задачу. Очевидно, что краевое условие ставится на левой границе так как волна распространяется слева направо. Для определённости пусть левая граница определена в точке $x = 0$ и граничное условие задаётся функцией $f(0, t) = \mu(t)$, $t > 0$.

Задача 1:

Решение:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ f(x, 0) = g(x), & x > 0 \\ f(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Доопределим $g(x) = 0$ при $x < 0$. Тогда $f(x, t) = g(x - ut)$ при положительном аргументе функции $g(z)$, то есть при $x - ut > 0$. При отрицательном аргументе $x - ut < 0$ функция $f(x, t) = 0$.

Так как $g(x - ut)|_{x=0} = g(-ut) = 0$, то граничное условие выполнено.

Таким образом, решение **Задачи 1** имеет вид: $f(x, t) = \begin{cases} 0, & t > x/u \\ g(x - ut), & t < x/u \end{cases}$

Задача 2:

Решение:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ f(x, 0) = 0, & x > 0 \\ f(0, t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что решение представимо в виде $f(x, t) = g(x - ut)$. Из граничного условия следует $f(0, t) = g(-ut) = \mu(t)$. Откуда вытекает вид функции $g(z) = \mu(-z/u)$. Тогда $f(x, t) = g(-(x - ut)/u) = \mu(t - x/u)$. Доопределим $\mu(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда $f(x, t) = \mu(t - x/u)$ при положительном аргументе функции $\mu(t)$, то есть при $t - x/u > 0$ и $f(x, t) = 0$ при отрицательном аргументе $t - x/u < 0$. Так как $x > 0$ и $\mu(t - x/u)|_{t=0} = \mu(-x/u) = 0$, то есть начальное условие выполнено.

Таким образом, решение **Задачи 2** представимо в виде $f(x, t) = \begin{cases} \mu(t - x/u), & t > x/u \\ 0, & t < x/u \end{cases}$

Начально-краевая задача (2)

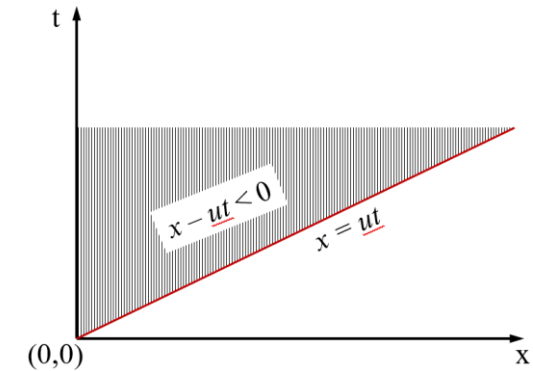
Задача 3:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ f(x, 0) = g(x), & x > 0 \\ f(0, t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

Решение:

В силу линейности уравнение решение **Задачи 3** есть суперпозиция решений **задач 1 и 2**.

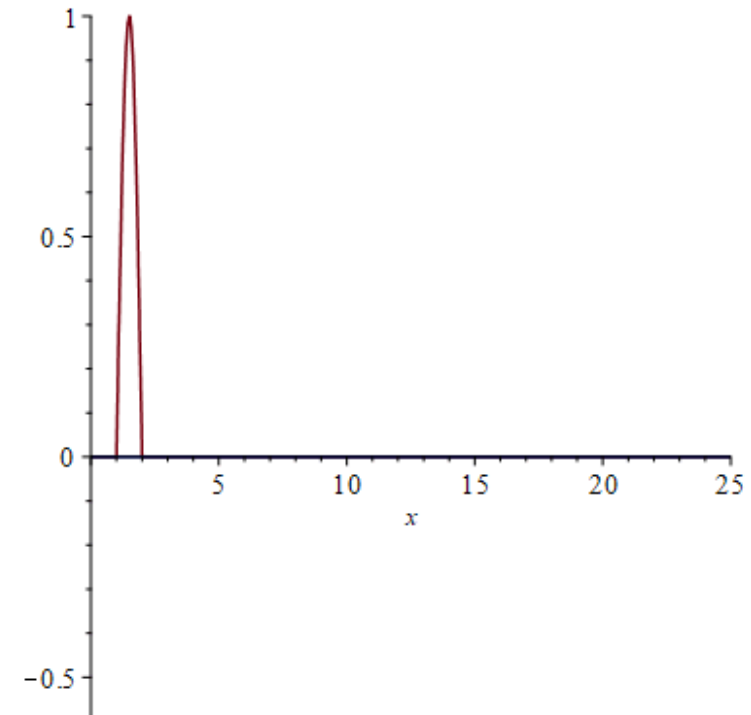
$$f(x, t) = \begin{cases} \mu(t - x/u), & t > x/u \\ g(x - ut), & t < x/u \end{cases}$$



$t = 0.$

Пример:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\sin(\pi x) & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & x > 2 \end{cases}, \quad \mu(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{10}\right)\right) \cos(\pi t), \quad u = 2$$



Начально-краевая задача в случае $u < 0$

Рассмотрим случай уравнения переноса со скоростью $u < 0$

1. Решением будет волна, распространяющееся справа налево $g(x + ut)$ и решение не меняется вдоль характеристик $x = -ut + x_0$.
2. В случае краевой задачи на полуограниченной прямой $x \leq x_R$, то, очевидно, что граничное условие задаётся на правой границе x_R , так как волна движется справа налево.

Аналогично приведённым выше выкладкам начально-краевая задача

имеет следующее решение

$$f(x, t) = \begin{cases} \mu(t + x/u), & t > -\frac{x - x_R}{u} \\ g(x + ut), & t < -\frac{x - x_R}{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & x < x_R, \quad t > 0 \\ f(x, 0) = g(x), & x < x_R \\ f(x_R, t) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

Волновое уравнение:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$