

Лекция 2.3

Уравнение Бюргерса

Система уравнений Эйлера

Разрывные решения

Абалакин Илья Владимирович

14 марта 2022 года
21 марта 2022 года

1D невязкое уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = 0, \quad u \equiv u(x, t)$$

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$f(u) = \frac{u^2}{2}$$

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \quad f'(u) = u$$

1D

Вспомним лекцию 2.1

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\cancel{\rho \nabla \cdot \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\cancel{\frac{1}{\rho} \nabla p}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E = -E \cancel{\nabla \cdot \mathbf{u}} + \nabla \cdot p \mathbf{u}$$

При предположении $\nabla p = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
система уравнений Эйлера преобразуется в
систему уравнений переноса

Невязкое уравнение Бюргерса

линейной

Сопоставим решение
и
начальной задачи

нелинейной

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, & a = \text{const} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Решение — бегущая волна

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

Аналогично

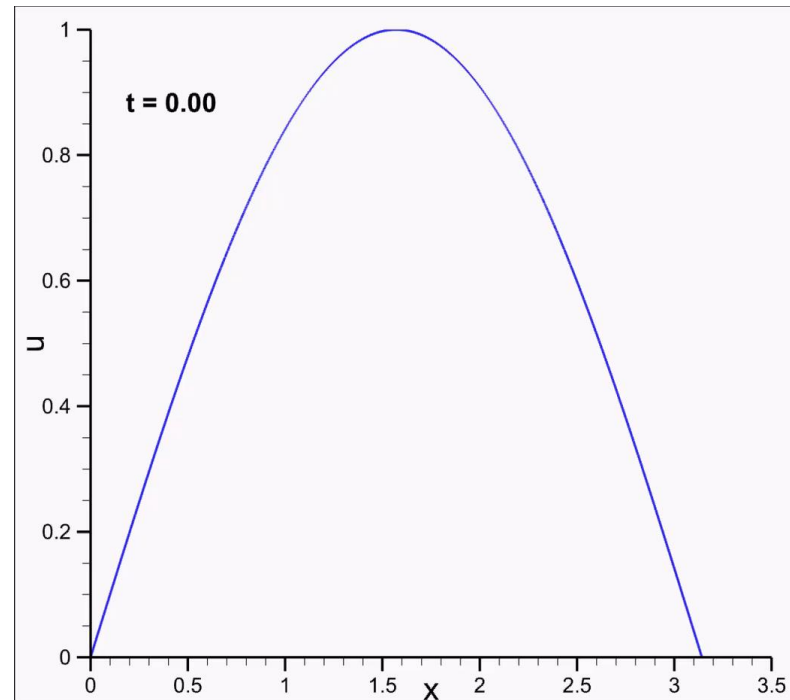
$$u(x, t) = u_0(x - ut)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

$$u_x = -\frac{u'_0 u}{1 + u'_0 t}, \quad u_t = \frac{u'_0}{1 + u'_0 t}$$

$$u'_0 < 0 \Rightarrow \exists (t_c, x_c) : 1 + u'_0(x_c, t_c)t_c = 0$$

Градиентная катастрофа



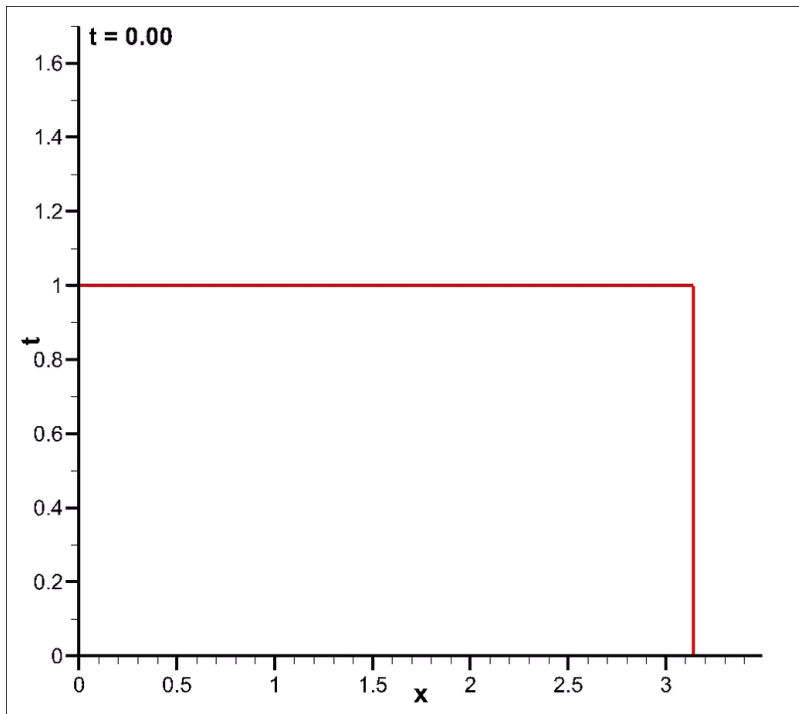
Невязкое уравнение Бюргерса

Уравнение характеристики $\Gamma = (x(t), t)$: $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$

Производная функции $u(x(t), t)$ вдоль характеристики Γ : $\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + uu_x = 0$

$$\Rightarrow u(x(t), t) = \text{const} = u(x(0), 0) = u_0(x) \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u_0(x), \quad x(0) = x_0 \longleftarrow$$

Характеристики — прямые линии: $x(t) = u_0(x)t + x_0$



$$u_0(x_1)t + x_1 = u_0(x_2)t + x_2 \Rightarrow t = -\frac{x_2 - x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)}$$

$$t_c = -\frac{1}{\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left(\frac{u_0(x_2) - u_0(x_1)}{x_2 - x_1} \right)} = -\frac{1}{\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} u'_0(x) dx \right)}$$

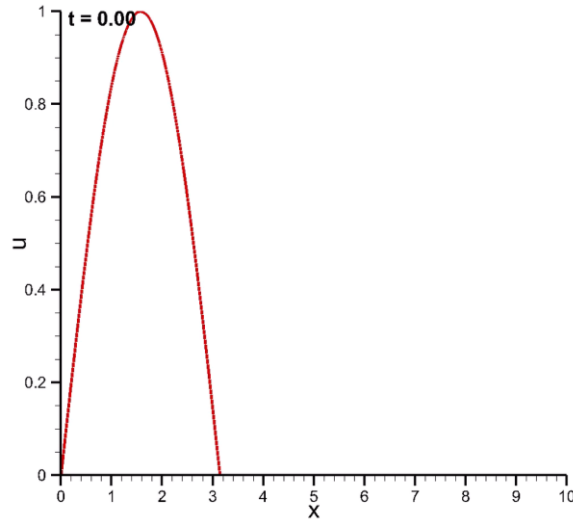
$$t_c = -\frac{1}{\min_{x \in \mathbb{R}} u'_0(x)}$$

$$\longleftarrow t_c = -\frac{1}{\min_{0 \leq x \leq \pi} \cos(x)} = -\frac{1}{\cos(\pi)} = 1, \quad x_c = \pi$$

Невязкое уравнение Бюргерса

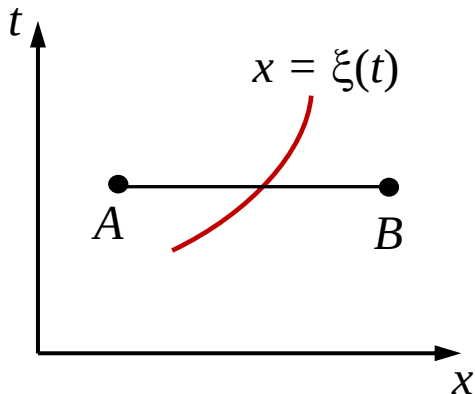
Решение задачи:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases} \end{cases}$$



Соотношение на разрыве

$$u_t = -f(u)_x$$



$$I(t) = \int_A^B u(x, t) dx = \int_A^{\xi} u(x, t) dx + \int_{\xi}^B u(x, t) dx$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_A^B u_t(x, t) dx = \int_A^{\xi} u_t(x, t) dx + u_L s + \int_{\xi}^B u_t(x, t) dx - u_R s$$

$$s = \frac{d\xi(t)}{dt}, \quad u_L = \lim_{x \rightarrow \xi+0} u(x, t), \quad u_R = \lim_{x \rightarrow \xi-0} u(x, t)$$

$$\frac{dI}{dt} = - \int_A^{\xi} f_x(u) dx + u_L s - \int_{\xi}^B f_x(u) dx - u_R s = f(u_A) - f(u_L) + u_L s + f(u_R) - f(u_B) - u_R s$$

$$\frac{dI}{dt} = - \int_A^B f_x(u) dx = f(u_A) - f(u_B)$$

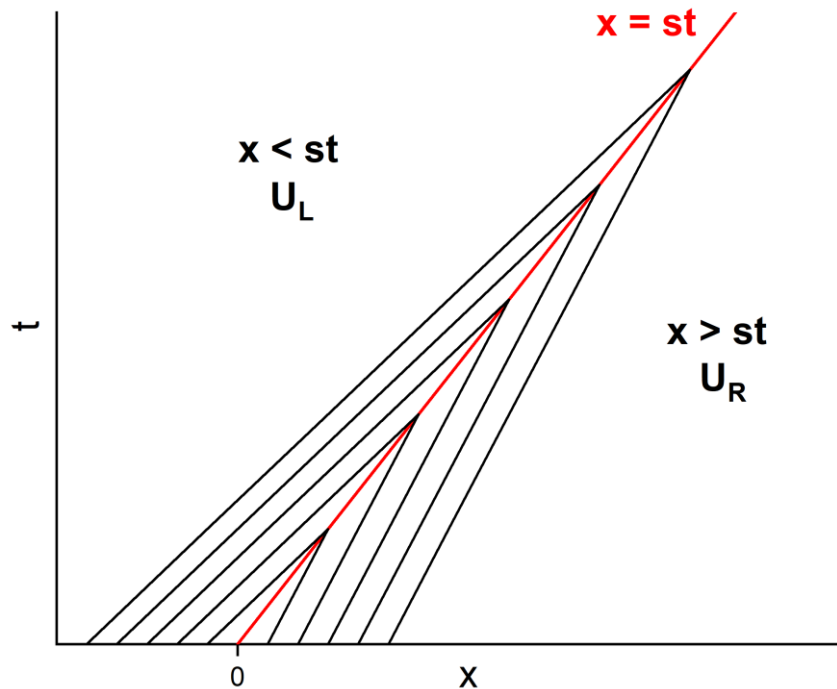
$$s = \frac{f(u_B) - f(u_A)}{u_B - u_A}, \quad [f] = s[u]$$

Условие Ренкина-Гюгонио

Невязкое уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = 0 \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

$$u_L > u_R$$

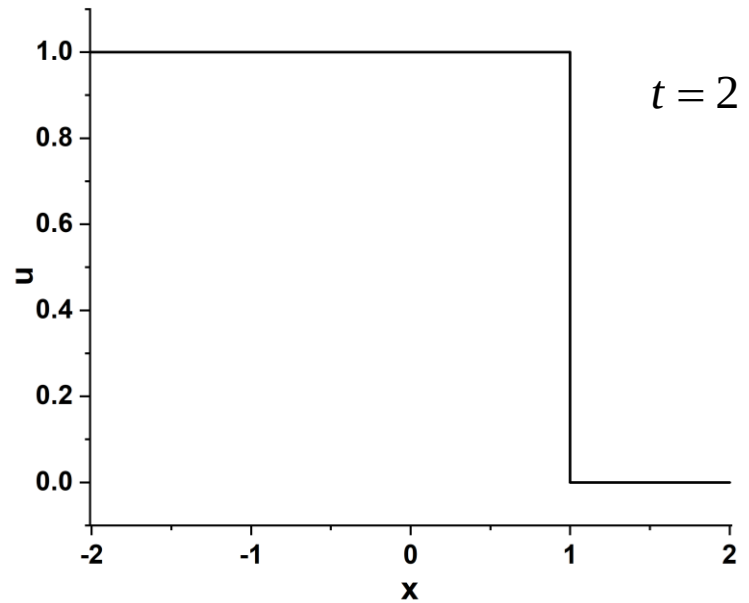


Ударная волна

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases}$$

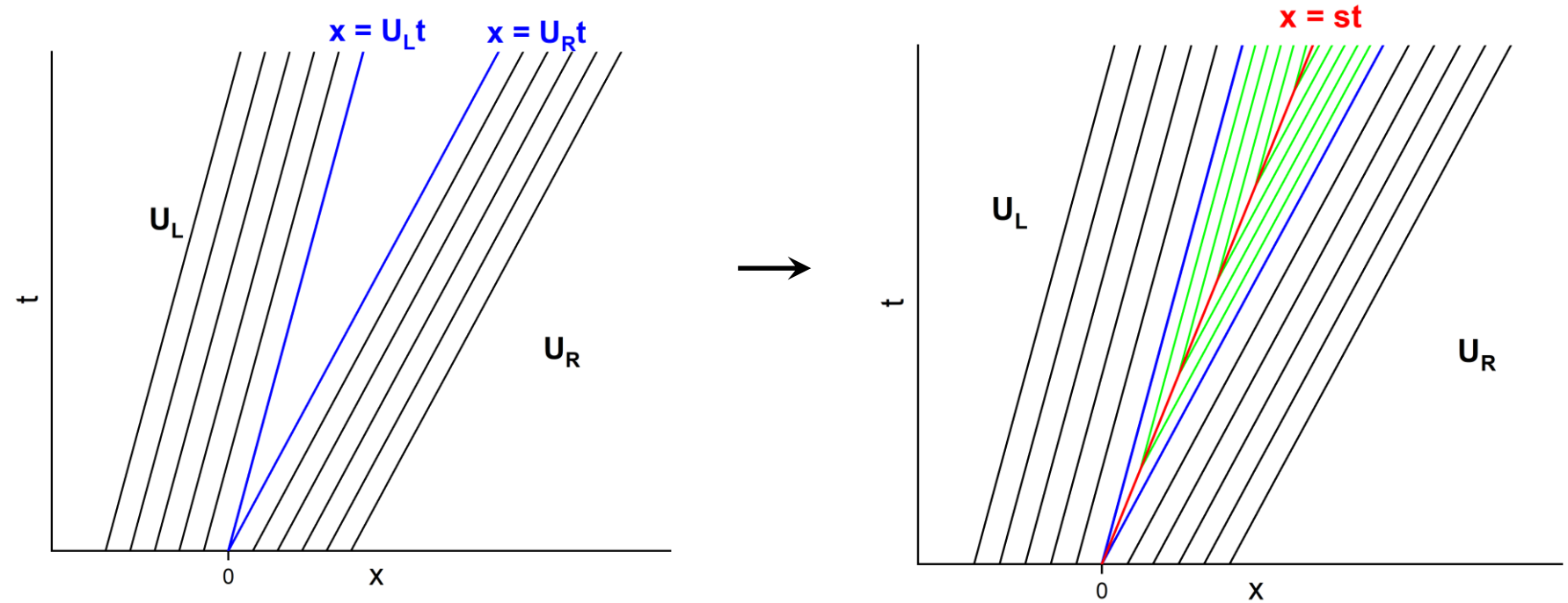
$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{u_R^2}{2} - \frac{u_L^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2}$$

$$u_L = 1, \quad u_R = 0$$



Невязкое уравнение Бюргерса

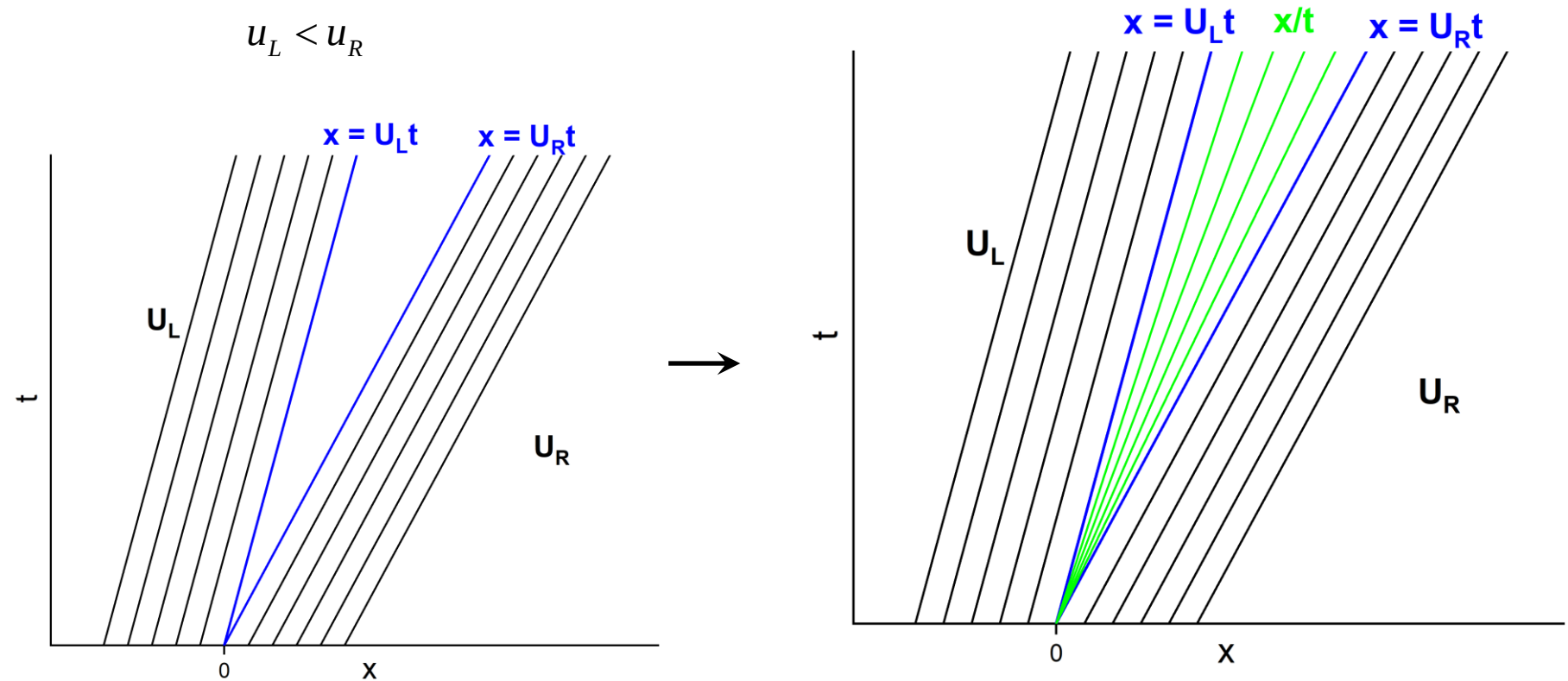
$$u_L < u_R$$



Решение 1: Решение типа ударной волны (УВ разрежения)

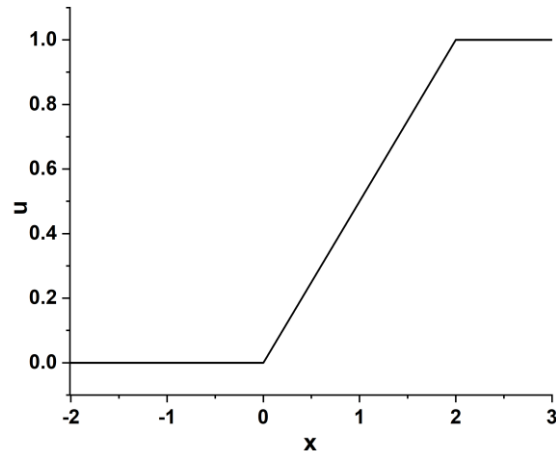
~~$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases},$$~~

Невязкое уравнение Бюргерса



Решение 2: Решение — волна разрежения

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t \\ \frac{x}{t}, & u_L t \leq x \leq u_R t, \\ u_R, & x > u_R t \end{cases}$$



$$u_L = 0, \quad u_R = 1$$

$$t = 2$$

Энтропийное условие (1)

Разрывное решение задачи (УВ) существует, если $u_L > u_R \Rightarrow u_L > \frac{u_L + u_R}{2} > u_R$

Энтропийное условие 1

$$\boxed{f'(u_L) > s > f'(u_R)} \quad \text{Истинно для произвольного выпуклого потока} \quad f''(u) > 0$$

Математическое определение энтропии: $(U(u):U''(u) \geq 0, \quad F(u))$

$U(u)$ задано. Определим поток энтропии, исходя из уравнения: $U_t(u) + F_x(u) = 0$

$U'(u)u_t + F'(u)u_x = 0$ и сопоставим с уравнением $u_t + f'(u)u_x = 0$

$$F'(u) = U'(u) f'(u) \quad F(u) = \int_0^u U'(z) f'(z) dz = U(z) f'(z) \Big|_0^u - \int_0^u U(z) f''(z) dz$$

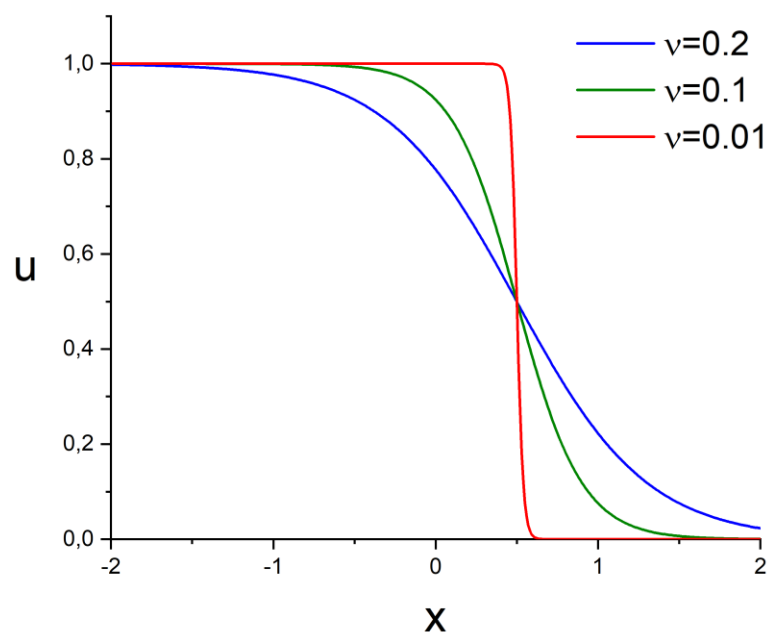
$$f'(0) = 0, \quad F(u) = U(u) f'(u) - \int_0^u U(z) f''(z) dz$$

$$\text{Для уравнения Бюргерса:} \quad U(u) = \frac{u^2}{2}, \quad f'(u) = u \quad \Rightarrow F(u) = \frac{u^3}{3}$$

$$u(u_t + u^2 u_x) = (u^2)_t + \left(\frac{u^3}{3} \right)_x = U_t(u) + F_x(u) = 0$$

Энтропийное условие (2)

$$u_t + f(u)_x = \nu u_{xx} \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \quad u(x, t) = s - \frac{u_L - u_R}{2} \operatorname{th} \left(\frac{(x - st)(u_L - u_R)}{4\nu} \right), \quad s = \frac{u_L + u_R}{2}$$



Энтропийное условие (3)

Понятие слабого решения

$$\varphi(x, t) \in C_0^1 \Leftrightarrow \varphi \in C^1 : \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : \varphi(x, t) \neq 0\} \subset [a, b] \times [0, T]$$

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f_x(u)) \varphi(x, t) dx dt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \varphi(x, 0) dx$$

$$u^\varepsilon : u_t^\varepsilon + f_x(u^\varepsilon) = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon : u_t + f_x(u) = 0 \quad \text{решение с исчезающей вязкостью}$$

Если существует решение с исчезающей вязкостью, то оно есть слабое решение

Решение с исчезающей вязкостью удовлетворяет уравнению

$$U_t(u) + F_x(u) \leq 0 \quad \text{Энтропийное условие 2}$$

Термодинамика

1-ый закон термодинамики $d\varepsilon = \delta Q - p d\eta$

Работа газа при изменении объёма
 $\delta a = -p d\eta, \quad \eta = 1/\rho$

Обмен теплом с внешними телами
 δQ

Внутренняя энергия ε является *однозначной функцией состояния газа*^{*)}.

Q и a зависят от состояния системы и от процесса, в результате которого система пришла в это состояние.

$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad TdS = d\varepsilon + p d\eta$ равновесные процессы

$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$ неравновесные процессы

2-ой закон термодинамики

Энтропия — *функция состояния газа*.

Для теплоизолированных систем (*адиабатических систем*) — $\delta Q = 0$

$dS \geq 0$ **2-ой закон термодинамики**

^{*)}Термодинамическая функция состояния — это функция параметров системы, которая зависит только от значений параметров в конечных точках пути изменения системы

Уравнения состояния, энтропия

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$$

$p = \rho RT, \quad \varepsilon = \varepsilon(T)$ $\varepsilon = c_v T \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad R = c_p - c_v$ $\varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T$	$\left. \begin{array}{l} \text{идеальный газ} \\ \text{совершенный газ} \end{array} \right\}$	$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$
--	---	-------------------------------------

$$TdS = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right); \quad TdS = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} dp \quad \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} \cdot TdS = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} dp \right)$$

$$\frac{\gamma - 1}{R} \frac{p}{\rho^\gamma} dS = \frac{\gamma p}{\rho^{\gamma - 1}} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^\gamma} dp = d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) \quad \frac{\gamma - 1}{R} dS = \frac{\rho^\gamma}{p} d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$$

Энтропия

$$S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + const$$

Для гладких адиабатических течений $dS = 0$

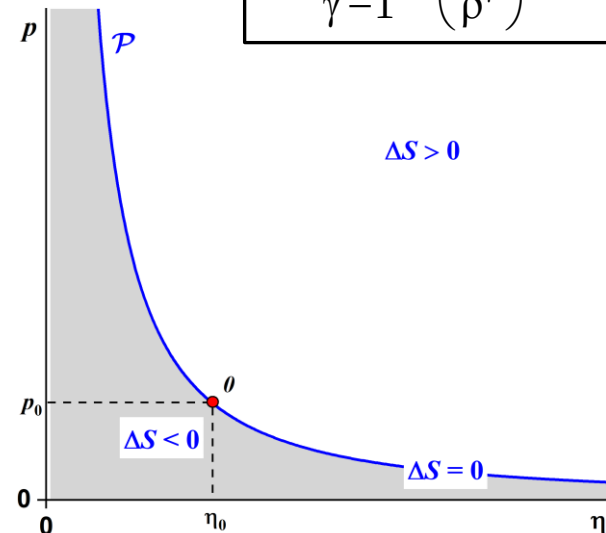
$$d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = const, \quad p\eta^\gamma = const$$

адиабата Пуассона $p = \frac{p_0 \eta_0^\gamma}{\eta^\gamma}$

$$\tilde{S} = \exp(S/C) = p/\rho^\gamma \quad \frac{d\tilde{S}}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$$

$$C = R/(\gamma - 1)$$

Замечание
Энтропийная функция



Скорость звука

$$p = p(\rho, S) \quad dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S d\rho + \frac{\partial p}{\partial S} \Big|_\rho dS = c^2 d\rho \quad \boxed{c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S}$$
$$dS = 0$$

Для идеального газа $p = C\rho^\gamma$ $\frac{\partial p}{\partial \rho} = C\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma} \gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}$



$$\boxed{c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}}$$

Уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = (\rho, m, E)^T = \left(\rho, \rho u, \rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right)^T$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left(E - \frac{m^2}{2\rho} \right) \\ \frac{m}{\rho} \left(\gamma E - (\gamma - 1) \frac{m^2}{2\rho} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (\text{Л2.7})$$

$$\mathbf{A}(\rho, u, p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\gamma - 3) \frac{u^2}{2} & -(\gamma - 3)u & \gamma - 1 \\ u \left[(\gamma - 2) \frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{\gamma - 1} \right] & -(2\gamma - 3) \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

Уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_U(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A}_U = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \quad (\text{Л2 Замена переменных})$$

$$\mathbf{U} = (\rho, u, p)^T \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ (\gamma-1)\frac{u^2}{2} & -u(\gamma-1) & \gamma-1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_U = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Уравнения Эйлера

$$\mathbf{A}_U = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_U(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_U(\mathbf{U}) \mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}) \mathbf{S}_U^{-1}(\mathbf{U}) \quad (\text{Л2 замена переменных и важное замечание})$$

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u + c & 0 \\ 0 & 0 & u - c \end{pmatrix} \quad \text{Собственные значения}$$

$$\mathbf{S}_U(\mathbf{U}) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{U}) \mid \mathbf{r}_2(\mathbf{U}) \mid \mathbf{r}_3(\mathbf{U})) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Правые собственные вектора}$$

$$\mathbf{S}_U^{-1}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{l}_1^T(\mathbf{U})}{\frac{\mathbf{l}_2^T(\mathbf{U})}{\rho c}} \\ \frac{\mathbf{l}_2^T(\mathbf{U})}{\rho c} \\ \frac{\mathbf{l}_3^T(\mathbf{U})}{\rho c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{pmatrix} \quad \text{Левые собственные вектора}$$

Уравнения Эйлера в характеристической форме (1)

$$\mathbf{S}_U^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \Lambda \mathbf{S}_U^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

Характеристические переменные

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + u \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

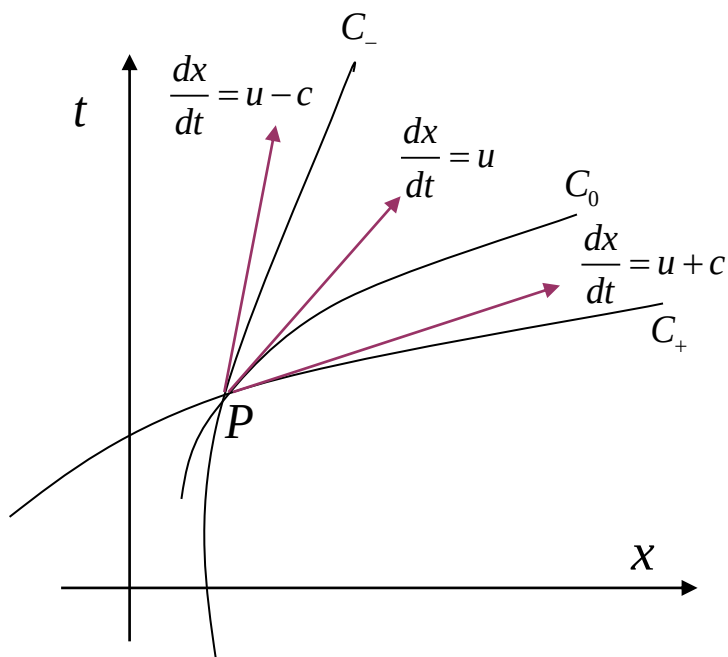
$$\delta w_1 = \delta p - \frac{1}{c^2} \delta p$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u + c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

$$\delta w_2 = \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u - c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

$$\delta w_3 = \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p$$



δw_1 распространяется со скоростью **u**
вдоль характеристики **C_0**

C_0 – траектория

δw_2 распространяется со скоростью **$u+c$**
вдоль характеристики **C_+**

$\delta w^{(3)}$ распространяется со скоростью **$u-c$**
вдоль характеристики **C_-**

C_+ and C_- – Mach lines

Характеристические переменные также называются
Римановскими инвариантами

Уравнения Эйлера в характеристической форме (2)

Используя соотношение на адиабате Пуассона: $S = \frac{p}{\rho^\gamma}$ (1), $p = K\rho^\gamma$ (2), $c^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1}$ (3)

$$\partial S^{(1)} = \partial \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{1}{\rho^\gamma} \partial p - \gamma \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{c^2} \frac{1}{\rho^\gamma} \partial \rho = -\frac{c^2}{\rho^\gamma} \left(\partial \rho - \frac{1}{c^2} \partial p \right), \quad (5)$$

$$\partial u + \frac{1}{\rho c} \partial p^{(2)} = \partial u + \left(\frac{1}{\rho c} \right) K \gamma \rho^{\gamma-1} \partial \rho \stackrel{(3)}{=} \partial u + \left(\frac{1}{\rho c} \right) K \gamma \rho^{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho c}{K \gamma \rho^{\gamma-1}} \partial c \right) = \partial u + \frac{2}{\gamma-1} \partial c \quad (6)$$

Таким образом, используя соотношения (5)-(6), переменные Римана могут быть получены явным образом

$$w_1 = S, \quad w_2 = u + \frac{2}{\gamma-1} c, \quad w_3 = u - \frac{2}{\gamma-1} c$$

В результате,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Перенос энтропии

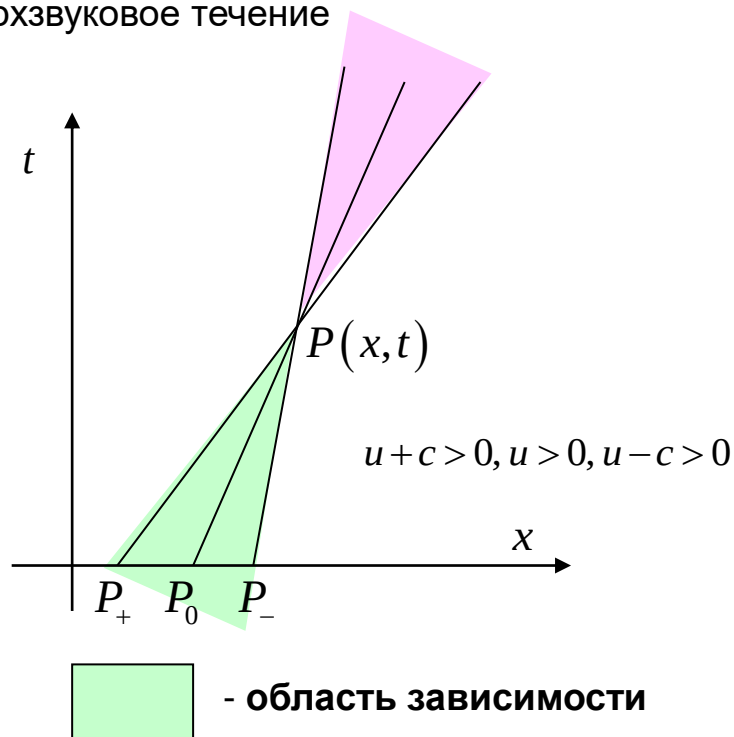
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0$$

Перенос акустических волн

Характеристики в x - t плоскости: дозвуковое и сверхзвуковое течение

Сверхзвуковое течение

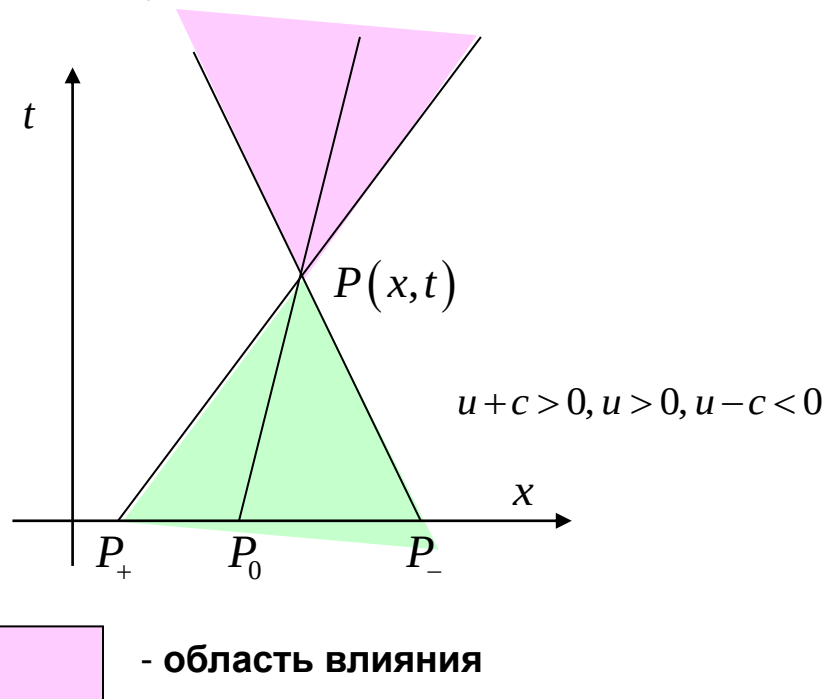


$$s(P) = s(P_0)$$

$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P) = \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+)$$

$$\left(u - \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P) = \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_-)$$

Дозвуковое течение

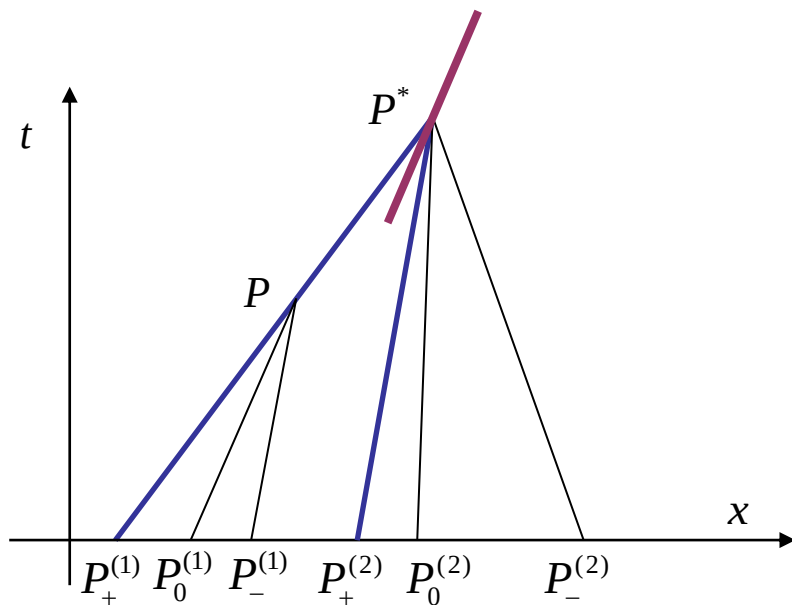


перенос со скоростью u

перенос со скоростью $u+c$

перенос со скоростью $u-c$

Характеристики в x - t плоскости: разрывы



$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P^*) = \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(1)})$$

$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P^*) = \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(2)})$$

$$\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(1)}) \neq \left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right)(P_+^{(2)})$$



разрыв = ударная волна

Соотношения на разрыве

$$\mathbf{Q}_t = -\mathbf{F}_x(\mathbf{Q})$$

$$\int_A^B \mathbf{Q}(x, t) dx = \mathbf{I}(t) = \int_A^{\xi(t)} \mathbf{Q}(x, t) dx + \int_{\xi(t)}^B \mathbf{Q}(x, t) dx$$

$$\int_A^B \mathbf{Q}_t(x, t) dx = \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \int_A^{\xi} \mathbf{Q}_t(x, t) dx + \mathbf{Q}_L \mathcal{D} + \int_{\xi}^B \mathbf{Q}_t(x, t) dx - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}$$

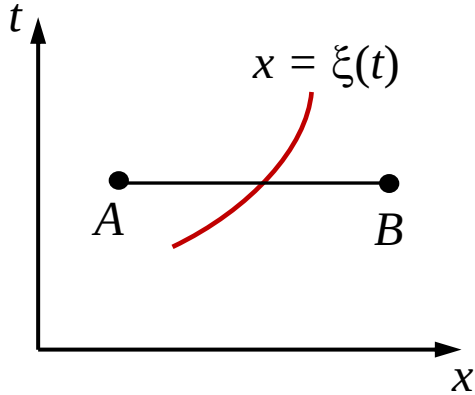
$$\mathcal{D} = \frac{d\xi(t)}{dt}, \quad \mathbf{Q}_L = \lim_{x \rightarrow \xi+0} \mathbf{Q}(x, t), \quad \mathbf{Q}_R = \lim_{x \rightarrow \xi-0} \mathbf{Q}(x, t)$$

$$-\int_A^B \mathbf{F}_x(\mathbf{Q}) dx = \frac{d\mathbf{I}}{dt} = -\int_A^{\xi} \mathbf{F}_x(\mathbf{Q}) dx + \mathbf{Q}_L \mathcal{D} - \int_{\xi}^B \mathbf{F}_x(\mathbf{Q}) dx - \mathbf{Q}_L \mathcal{D}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_A) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_B) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_A) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{Q}_L \mathcal{D} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_B) - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}$$

Условия Ренкина-Гюгонио

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) - \mathbf{Q}_L \mathcal{D} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{Q}_R \mathcal{D}}$$



Соотношения на разрыве

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{U}_L \mathcal{D} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{U}_R \mathcal{D}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0$$

$$\rho_1 u_1 - \rho_1 \mathcal{D} = \rho_0 u_0 - \rho_0 \mathcal{D}$$

$$\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \mathcal{D} = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \mathcal{D}$$

$$\underline{\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})}$$

$$\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \frac{\mathcal{D}^2}{2} = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \frac{\mathcal{D}^2}{2}$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 - \rho_1 u_1 \mathcal{D} = \rho_0 u_0^2 + p_0 - \rho_0 u_0 \mathcal{D}$$

$$\rho_1 u_1^2 - \rho_1 u_1 \mathcal{D} - \rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \mathcal{D} + p_1 = \rho_0 u_0^2 - \rho_0 u_0 \mathcal{D} - \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \mathcal{D} + p_1 \quad \rho_1 (u_1 - \mathcal{D})^2 \mathcal{D} + p_1 \mathcal{D} = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})^2 \mathcal{D} + p_1 \mathcal{D}$$

$$\underline{\rho_1 (u_1 - \mathcal{D})^2 + p_1 = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})^2 + p_0}$$

$$u_1 (E_1 + p_1) - E_1 \mathcal{D} = u_0 (E_0 + p_0) - E_0 \mathcal{D}$$

$$\rho_1 \left(\frac{u_1^3}{2} - \frac{u_1^2 \mathcal{D}}{2} \right) + \rho_1 \varepsilon_1 u_1 + p_1 u_1 - \rho_1 (u_1 - \mathcal{D})^2 \mathcal{D} - p_1 \mathcal{D} - \rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \frac{\mathcal{D}^2}{2} = \dots$$

$$\underline{\rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) \left(p_1 + \rho_1 \varepsilon_1 + \frac{(u_1 - \mathcal{D})^2}{2} \right) = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D}) \left(p_0 + \rho_0 \varepsilon_0 + \frac{(u_0 - \mathcal{D})^2}{2} \right)}$$

Соотношения на разрыве: контактный разрыв

Поток массы вещества через разрыв $m = \rho_1 (u_1 - \mathcal{D}) = \rho_0 (u_0 - \mathcal{D})$

Контактный разрыв $m = 0$

$$\rho_0 \neq 0, \quad \rho_1 \neq 0 \quad \Rightarrow u_1 - \mathcal{D} = u_0 - \mathcal{D} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{u_1 = u_0 = \mathcal{D}}$$

Из второго соотношения Рэнкина-Гюгонио $\rho_1 \underbrace{(u_1 - \mathcal{D})^2}_{=0} + p_1 = \rho_0 \underbrace{(u_0 - \mathcal{D})^2}_{=0} + p_0$

следует, что $\boxed{p_1 = p_0}$

Ударная волна $m \neq 0$

Соотношения на разрыве: ударная волна

В системе координат, движущейся вместе с разрывом со скоростью $\mathcal{D}$

$$\rho_1 \tilde{u}_1 = \rho_0 \tilde{u}_0$$

$$\rho_1 \tilde{u}_1^2 + p_1 = \rho_0 \tilde{u}_0^2 + p_0$$

$$\rho_1 \tilde{u}_1 \left(p_1 + \rho_1 \varepsilon_1 + \frac{\tilde{u}_1^2}{2} \right) = \rho_0 \tilde{u}_0 \left(p_0 + \rho_0 \varepsilon_0 + \frac{\tilde{u}_0^2}{2} \right)$$

$$\tilde{u} = u - \mathcal{D}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)\eta_0 - (\gamma-1)\eta_1}{(\gamma+1)\eta_1 - (\gamma-1)\eta_0}, \quad \eta = \frac{1}{\rho}$$

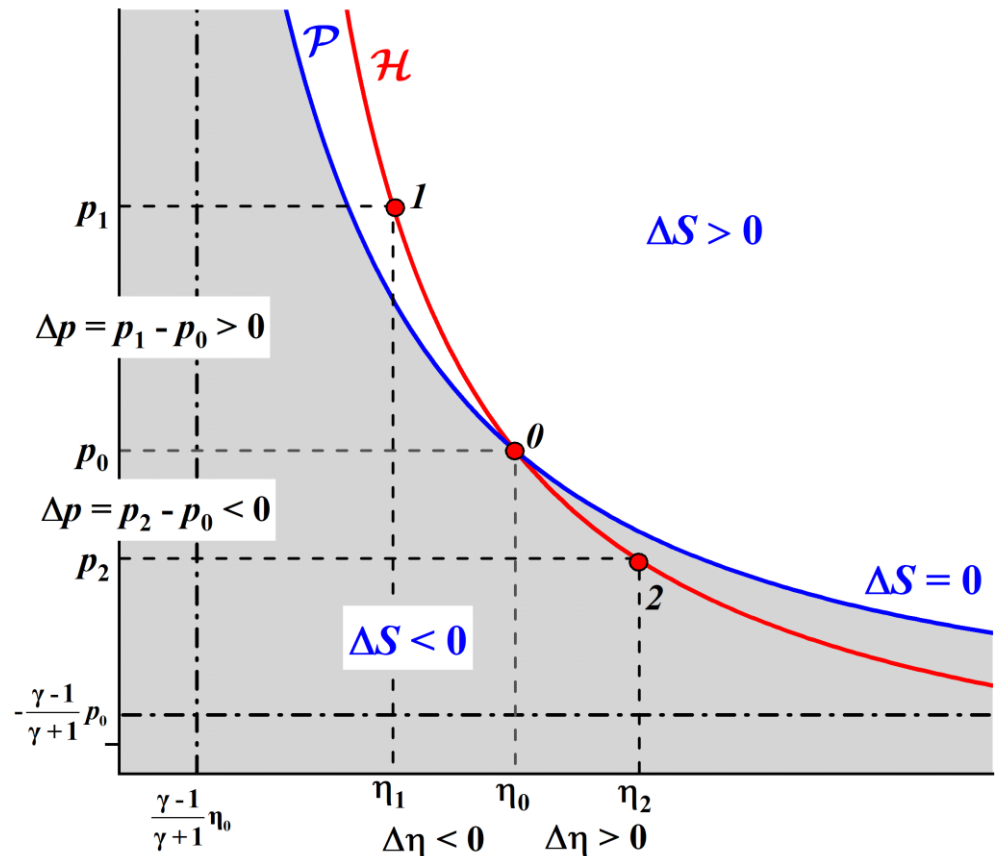
Фиксируем параметры 0

адиабата Гюгонио

$$p(\eta) = p_0 \frac{(\gamma+1)\eta_0 - (\gamma-1)\eta}{(\gamma+1)\eta - (\gamma-1)\eta_0}$$

адиабата Пуассона

$$p = \frac{p_0 \eta_0^\gamma}{\eta^\gamma}$$



Волна разрежения

Задача о «поршне»

$$u(x, t) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right)$$

Справа

$$0 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right) \Rightarrow x_{RW,R} = c_0 t \Rightarrow u_R = c_0$$

Слева

$$-U = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right) \Rightarrow x_{RW,L} = \left(c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} U \right) t$$

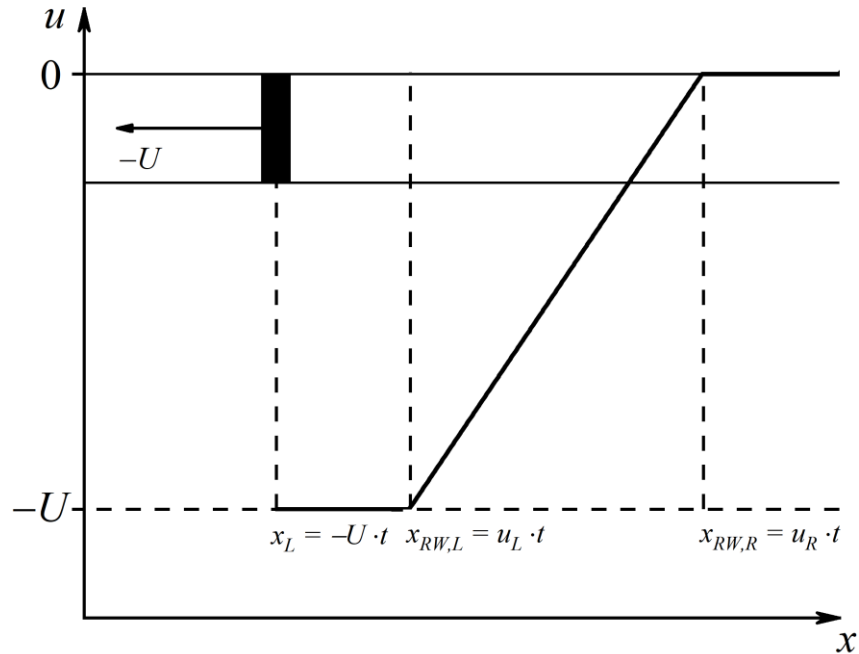
$$\Rightarrow u_L = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2} U$$

$$x_L < x_{RW,L} \Rightarrow -U < u_L \Rightarrow U < \frac{2}{\gamma - 1} c_0$$

Иначе за поршнем образуется область вакуума

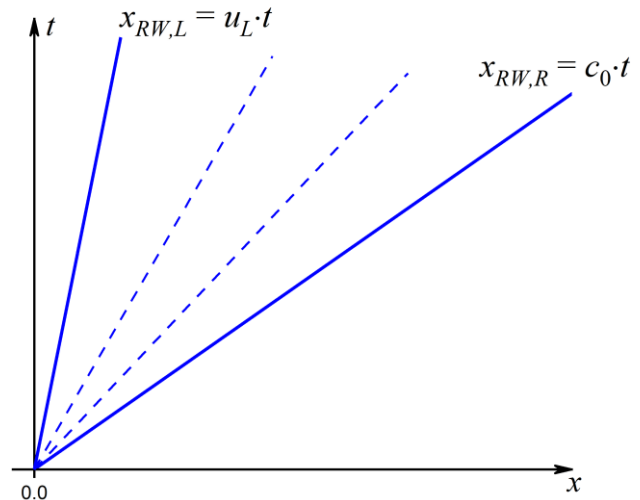
Для воздуха $\gamma = 1.4$, $c_0 = 331 \text{ м/с}$

$$U < 1.65 \text{ км/с}$$



Из соображений размерности решение зависит от $\xi = \frac{x}{t}$

Автомодельное или «самоподобное» решение



Распад произвольного разрыва (задача Римана)

Начальная задача для 1D системы уравнений Эйлера

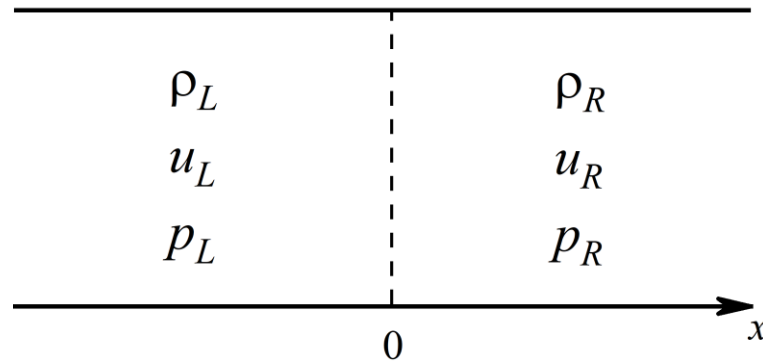
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u(E + p)}{\partial x} = 0$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0 \end{cases}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

$$p(x, 0) = \begin{cases} p_L, & x < 0 \\ p_R, & x > 0 \end{cases}$$



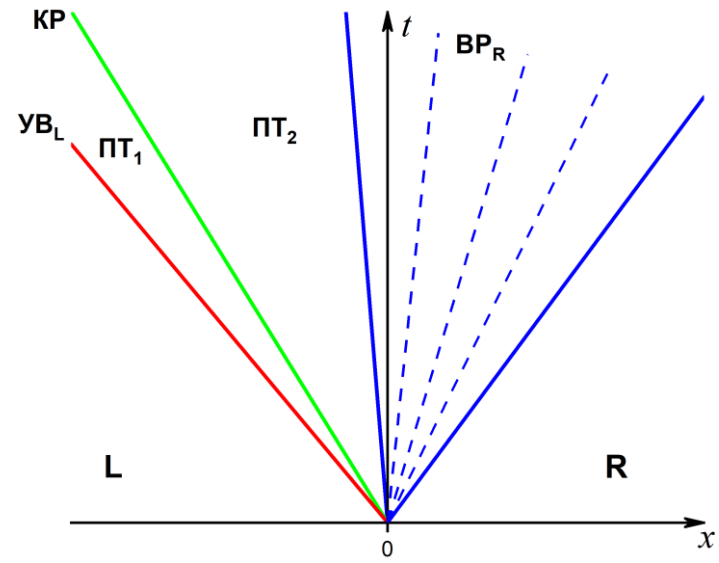
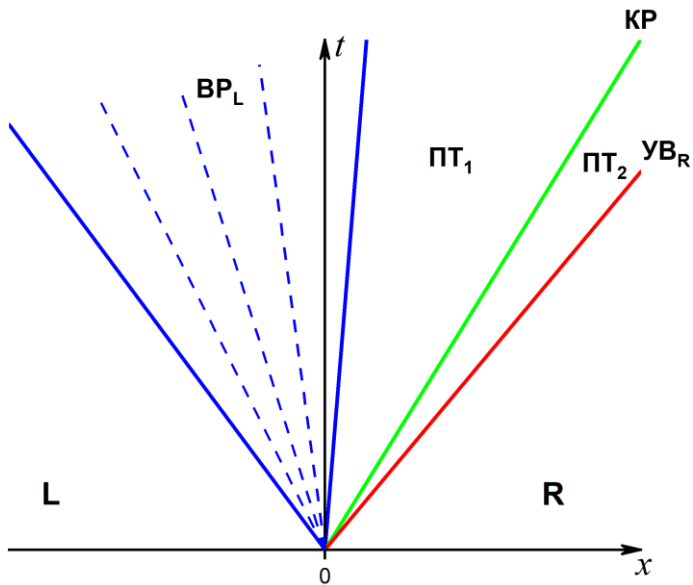
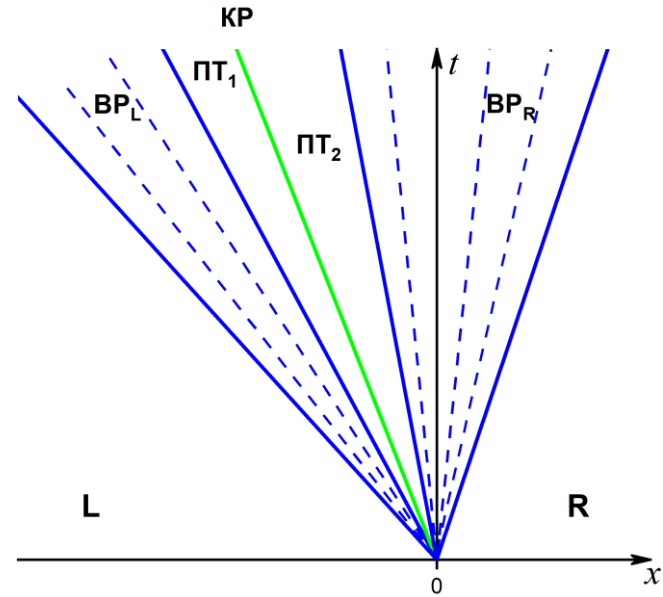
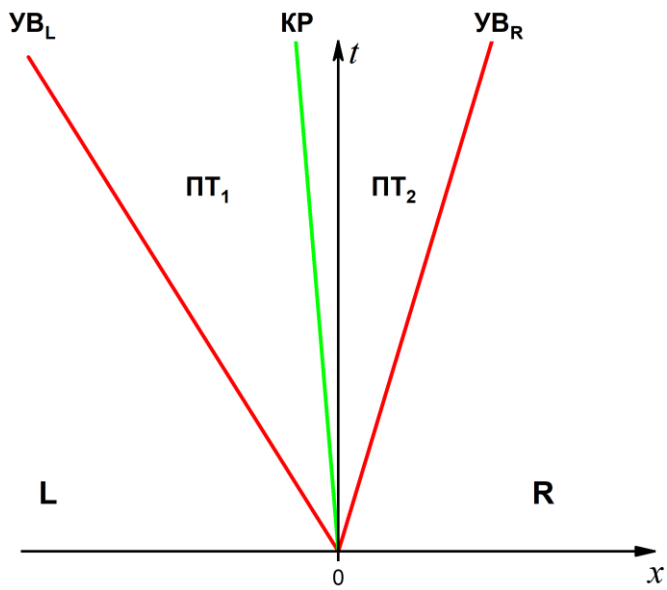
Задача не обладает характерным размером и характерным временем

Следовательно, имеет автомодельное решение, зависящее от переменной $\xi = \frac{x}{t}$

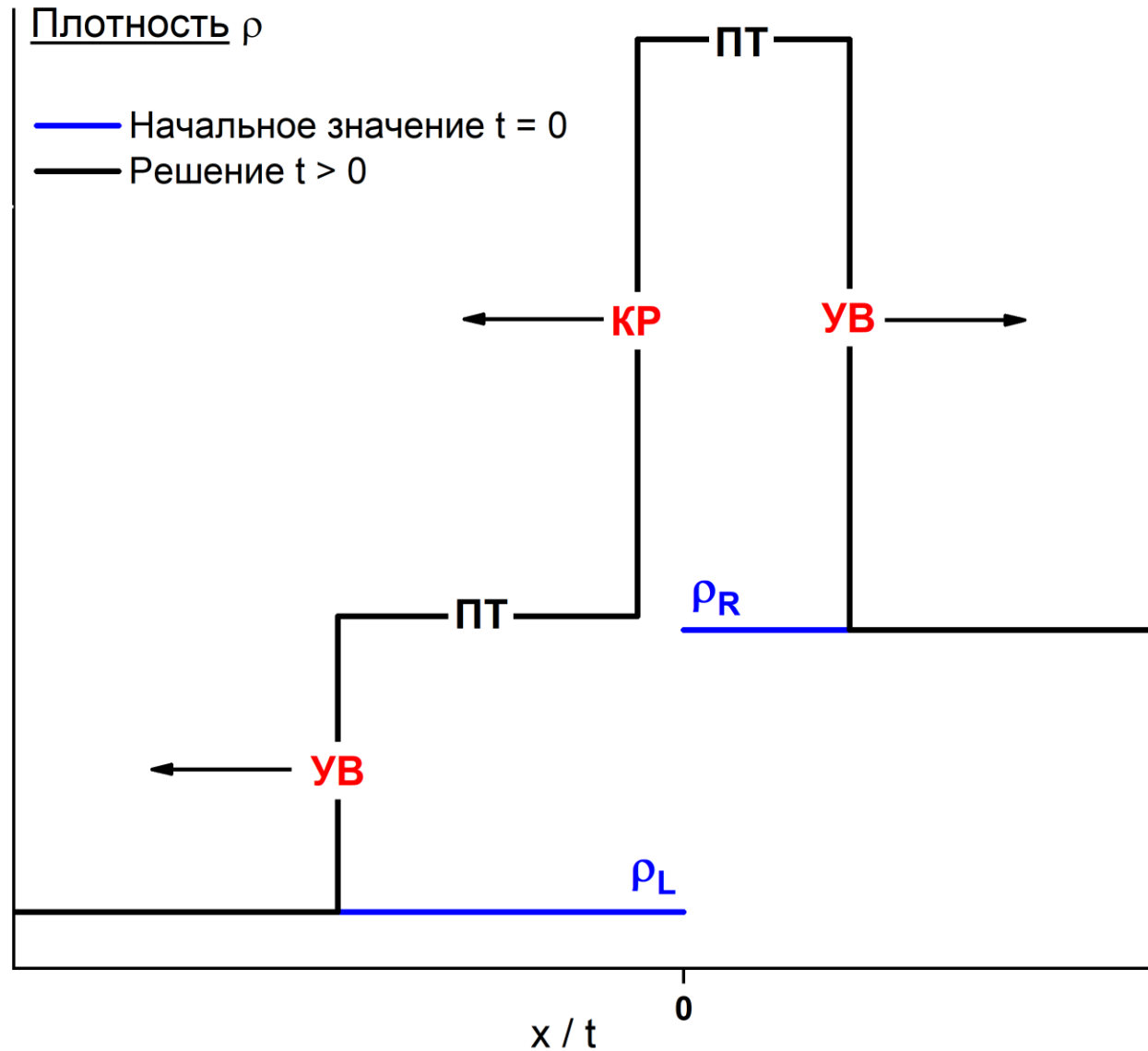
Решение состоит из

УВ — ударных волн, КР — контактного разрыва, ВР — волн разрежения,
соединённых областями постоянного течения — ПТ

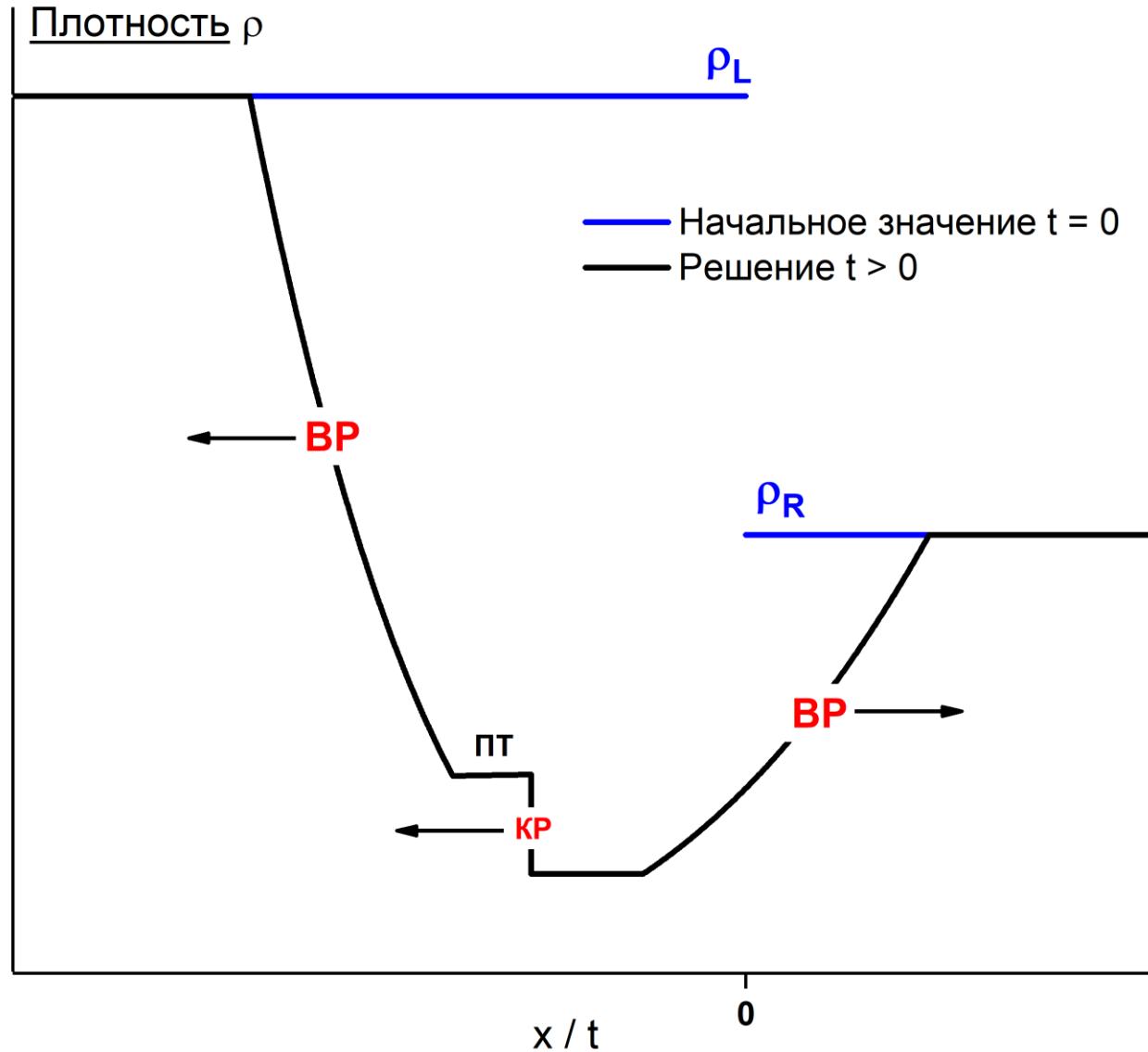
Распад произвольного разрыва (задача Римана) Характерные конфигурации



Распад произвольного разрыва (задача Римана) Решение УВ-УВ



Распад произвольного разрыва (задача Римана) Решение ВР-ВР



Распад произвольного разрыва (задача Римана) Решение ВР-УВ

