

Спецкурс «Введение в механику сплошной среды и вычислительную газовую динамику»

Приложение к лекциям

Формулы векторного анализа

Абалакин Илья Владимирович

1. Формулы векторного анализа

1.1. Операции и вспомогательные тензоры

Единичный тензор (символ Кронекера)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Тензор Леви-Чевита

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i = j, i = k, j = k \\ 1 & ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & ijk = 213, 132, 321 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Соглашение об обозначениях

1. По повторяющимся индексам проводится суммирование, например, $f_l = a_k b_{ij} c_{il} d_{jk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_k b_{ij} c_{il} d_{jk}$
2. Индексация компонент векторов и тензоров: "x" $\equiv$ "1", "y" $\equiv$ "2", "z" $\equiv$ "3"

Скалярное произведение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \quad (\text{A.3})$$

Векторное произведение

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.4})$$

Диадное произведение

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_j b_i \quad (\text{A.5})$$

Оператор набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \quad (\text{A.6})$$

Операция градиента от скаляра и вектора

$$\nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x} \quad \frac{\partial a}{\partial y} \quad \frac{\partial a}{\partial z} \right)^T, \quad (\nabla a)_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla \otimes \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} & \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (\nabla \mathbf{a})_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.8})$$

Операция дивергенции от вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \delta_{ij} (\nabla \mathbf{a})_{ij} \quad (\text{A.9})$$

Операция дивергенции от тензора

$$\operatorname{Div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{A})_i = \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_j} \quad (\text{A.10})$$

Операция ротора

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{A.10})$$

$$(\nabla \times \mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

Оператор производной по направлению

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.11})$$

Действие оператора (A.11) на вектор $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad [(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}]_i = a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.12})$$

Частные случаи

1. Дивергенция от скаляра умноженного на вектор

$$\text{div } \varphi \mathbf{a} = \nabla \cdot \varphi \mathbf{a} = \frac{\partial \varphi a_i}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi \quad (\text{A.13})$$

2. Операция дивергенции от диадного произведения одинаковых векторов

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})]_i &\stackrel{(\text{A.10})}{=} \frac{\partial (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})_{ij}}{\partial x_j} \stackrel{(\text{A.5})}{=} \frac{\partial a_j a_i}{\partial x_j} = a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \\ &\quad \downarrow (\text{A.12}) \quad \downarrow (\text{A.9}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{div } \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Оператор производной по направлению 2

$$(\mathbf{a} \otimes \nabla) = \begin{pmatrix} a_x \frac{\partial}{\partial x} & a_x \frac{\partial}{\partial y} & a_x \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y \frac{\partial}{\partial x} & a_y \frac{\partial}{\partial y} & a_y \frac{\partial}{\partial z} \\ a_z \frac{\partial}{\partial x} & a_z \frac{\partial}{\partial y} & a_z \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (\nabla \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \otimes \nabla)^T = \begin{pmatrix} a_x \frac{\partial}{\partial x} & a_y \frac{\partial}{\partial x} & a_z \frac{\partial}{\partial x} \\ a_x \frac{\partial}{\partial y} & a_y \frac{\partial}{\partial y} & a_z \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x \frac{\partial}{\partial z} & a_y \frac{\partial}{\partial z} & a_z \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Действие оператора (A.15) на вектор $\mathbf{b}$:

$$(\nabla \otimes \mathbf{a})\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \frac{\partial}{\partial x} & a_y \frac{\partial}{\partial x} & a_z \frac{\partial}{\partial x} \\ a_x \frac{\partial}{\partial y} & a_y \frac{\partial}{\partial y} & a_z \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x \frac{\partial}{\partial z} & a_y \frac{\partial}{\partial z} & a_z \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial x} \\ a_x \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial y} \\ a_x \frac{\partial b_x}{\partial z} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial z} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad [(\nabla \otimes \mathbf{a})\mathbf{b}]_i = a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \quad (\text{A.16})$$