



Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук



СУПРЕМУМ спецкурс

Введение в механику сплошных сред и вычислительную газовую динамику

Лекции 5-6-7



Содержание

Лекция 5

1. **Смысл численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.**
2. **Введение в методы решения ОДУ и систем ОДУ. Дифференциальная задача и разностная схема. Ошибка численного решения, аппроксимация с порядком k , невязка, устойчивость, сходимость**
3. **Схема «уголок» для уравнения переноса. Схемы «левый уголок» и «правый уголок», их отличия. Критерий Куранта-Фридрихса-Леви, число Куранта.**
4. **Метод линий. Полудискретная схема**



Смысл численного решения системы нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных ...



Нестрогие замечания

В общем случае,
решения в аналитической форме записи, увы не существует ☹

С существованием и единственностью решения ..тоже проблемы ☹

В общем случае,
существование решения определяется **физикой** 😊
Из физики может следовать, что решение не одно.. ☹

Главные трудности решения:

- наличие производных по пространству (первого и более высоких порядков),
- нелинейность по искомым функциям

Численные методы решения приходят на помощь 😊



Введение в методы решения ОДУ и систем ОДУ.

Базовые понятия



Дифференциальная задача

Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

для нахождения неизвестной непрерывной функции $u(t)$

$$\frac{du}{dt} - \lambda u = 0, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$
$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$$

Точное решение

$$u_{\text{exact}}(t) = u_0 e^{\lambda t}$$



Введение в методы решения ОДУ и систем ОДУ.

Базовые понятия



Разностная задача (СХЕМА)

Дискретизация области определения (построение **СЕТКИ**)

$$[0, t_{\max}] \longrightarrow \{t^{(n)} = n\tau, n = 0, 1, \dots, N\} \quad t^N = t_{\max}$$

Разностная задача Коши для линейного ОДУ

для нахождения неизвестной сеточной функции $\{u^{(n)}, n = 0, 1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\tau} - \lambda u^{(n)} &= 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ u^{(0)} &= u_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Точное решение разностной задачи

$$u_{exact}^{(n)} = (1 + \tau\lambda)^n u_0$$

Будем считать, что решение разностной задачи является приближенным решением дифференциальной задачи в смысле

$$u(t^{(n)}) \square u^{(n)}$$



Введение в методы решения ОДУ и систем ОДУ.

Базовые понятия



ОШИБКА численного решения

Введем сеточную функцию ошибки

$$\{\varepsilon^{(n)}, n = 0, 1, \dots, N\}, \quad \varepsilon^{(n)} = u^{(n)} - u(t^{(n)})$$

$$\varepsilon^{(n)} = u_{exact}^{(n)} - u_{exact} = (1 + \tau\lambda)^n u_0 - e^{\lambda t} u_0 = \left[(1 + \tau\lambda)^{t/\tau} - e^{\lambda t} \right] u_0, \quad t \equiv t^{(n)}$$

Можно показать, что

$$\forall t: 0 \leq t \leq t_{\max} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon^{(n)} = 0$$

Отсюда

$$\forall \delta \quad \exists \tau \quad \varepsilon^{(n)} < \delta$$

подсказка

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda\tau n + \frac{(\lambda\tau n)^2}{2!} + \frac{(\lambda\tau n)^3}{3!} + \dots$$

$$(1 + \tau\lambda)^{t/\tau} = (1 + \tau\lambda)^n = 1 + \tau\lambda n + \dots$$

Это свойство разностной постановки (схемы) называется **СХОДИМОСТЬЮ**



Введение в методы решения ОДУ и систем ОДУ.

Базовые понятия



АППРОКСИМАЦИЯ

Схема **АППРОКСИМИРУЕТ** дифференциальную задачу **с порядком аппроксимации k** , если при подстановке точного решения $u_{exact}(n\tau)$ в разностную схему **НЕВЯЗКА** $\zeta^{(n)}$ имеет порядок $O(\tau^k)$

УСТОЙЧИВОСТЬ

Схема называется **УСТОЙЧИВОЙ** по начальным данным, если

$$\exists C \geq 0 \quad \|u^{(n)}\| < C |u_0| \quad \|\cdot\| - \text{некоторая норма}$$

Пример нормы $\|\cdot\|_{\infty} = \max_{n=0,1,\dots,N} |u^{(n)}| \quad (L_{\infty})$

Теорема Лакса-Рябенского

Разностное решение **УСТОЙЧИВОЙ** схемы, **АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ** дифференциальное уравнение **с порядком аппроксимации k** , **СХОДИТСЯ** к точному решению **с порядком точности k** , т.е.

$$\|\varepsilon^{(n)}\| = O(\tau^k)$$

АППРОКСИМАЦИЯ (с порядком k) + УСТОЙЧИВОСТЬ = СХОДИМОСТЬ (с порядком k)

Схема k -го порядка аппроксимации для дифференциальной задачи (1)

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\tau} - \lambda u^{(n)} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$
$$u^{(0)} = u_0$$

$$u^{(n+1)} = (1 + \tau\lambda)u^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$
$$u^{(0)} = u_0$$

Заметим, что точное решение удовлетворяет схеме $u^{(n+1)} = e^{\lambda\tau}u^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$

$$e^{\lambda\tau} = \boxed{1 + \tau\lambda} + \frac{\tau^2\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^k\lambda^k}{k!} + \dots$$

$$u^{(n+1)} = \left(1 + \tau\lambda + \frac{\tau^2\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^k\lambda^k}{k!} \right) u^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2k)$$
$$u^{(0)} = u_0$$



Введение в методы решения ОДУ и систем ОДУ.

Базовые понятия



Линейная система ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} - AU &= 0, \quad 0 < t < t_{\max} \\ U(0) &= U_0 \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (3)$$

Точное решение

$$U(t) = U_0 \exp(At)$$

Схема k-го порядка аппроксимации для дифференциальной задачи (3)

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= \left(1 + \tau A + \frac{\tau^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^k A^k}{k!} \right) U^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ U^{(0)} &= U_0 \end{aligned} \quad (3k)$$



Схема «уголок» для уравнения переноса



Задача Коши для уравнения переноса с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$
$$u(0, x) = u_0(x)$$

Начальное решение – достаточно гладкое и ограниченное, т.е. $\|u_0\|_{\infty} = \sup |u_0(x)| < \infty$

Точное решение

$$u(t, x) = u_0(x - at)$$

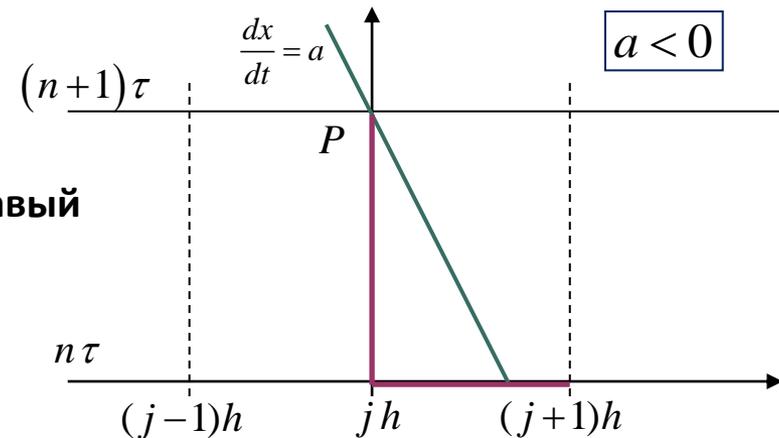
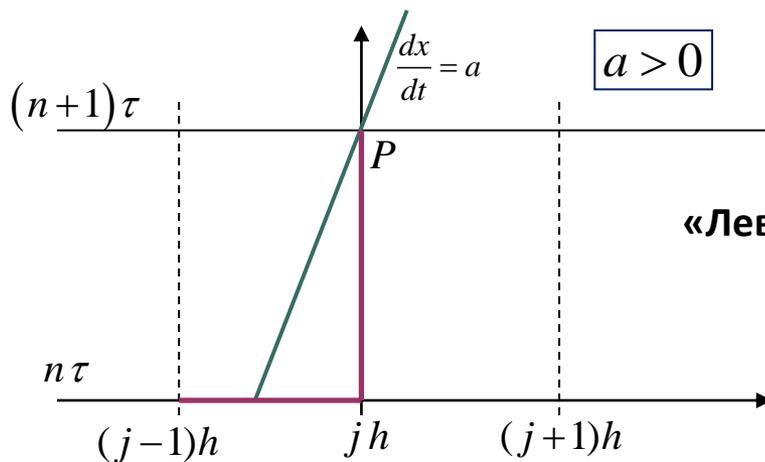
Разностная СХЕМА для уравнения переноса с постоянным коэффициентом

Дискретизация области определения (построение СЕТКИ)

$$x_j = ih \quad t^n = n\tau, \quad \tau, h > 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$



«Левый и Правый Уголки»

АППРОКСИМАЦИЯ и порядок аппроксимации

Пусть $u_{exact}(t, x)$ - точное решение уравнения переноса

Выпишем невязку в точке $(n\tau, jh)$

$$\zeta_j^n = \frac{u_{exact}(n\tau + \tau, jh) - u_{exact}(n\tau, jh)}{\tau} + a \frac{u_{exact}(n\tau, jh) - u_{exact}(n\tau, jh - h)}{h}$$

Разлагая в ряд Тейлора,

$$\zeta_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(n\tau, jh) + \frac{1}{2} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}((n + \theta_1)\tau, jh) \right) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x}(n\tau, jh) + \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(n\tau, (j + \theta_2)h) \right)$$

$0 \leq \theta_1 \leq 1$ $-1 \leq \theta_2 \leq 0$

$$|\zeta_j^n| \leq \frac{\tau}{2} \|u_{tt}\|_\infty + \frac{ah}{2} \|u_{xx}\|_\infty, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$|\zeta_j^n| = O(\tau) + O(h)$$



Схема (5) имеет первый ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ и по времени, и по пространству



Схема «уголок» для уравнения переноса



УСТОЙЧИВОСТЬ

Начальные данные для схемы (5)

$$u^0 = \{u_j^0, j \in \mathbb{Z}\} \quad \|u^0\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^0| < \infty$$

Перепишем схему (5)

$$u_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) u_j^n + a \frac{\tau}{h} u_{j-1}^n$$

При $a\tau/h \leq 1$

$$|u_j^{n+1}| \leq \max \{|u_j^n|, |u_{j-1}^n|\}$$

Возьмем максимум по $j \in \mathbb{Z}$

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$



Схема «левый уголок» (5) является УСТОЙЧИВОЙ в норме L_∞ с константой $C = 1$ при выполнении УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ $0 \leq a\tau/h \leq 1$

СХОДИМОСТЬ к точному решению

Введем **ОШИБКУ** разностного решения $\varepsilon_j^n = u_j^n - u_{exact}(n\tau, jh)$

Подставляя $u_j^n = u_{exact}(n\tau, jh) + \varepsilon_j^n$ в схему «левый уголок» (5),

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\tau} + a \frac{\varepsilon_j^n - \varepsilon_{j-1}^n}{h} = \zeta_j^n \quad \text{или} \quad \varepsilon_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) \varepsilon_j^n + a \frac{\tau}{h} \varepsilon_{j-1}^n + \tau \zeta_j^n$$

$$\text{При } a\tau/h \leq 1 \quad \left| \varepsilon_j^{n+1} \right| \leq \max \left\{ \left| \varepsilon_j^n \right|, \left| \varepsilon_{j-1}^n \right| \right\} + \tau \left| \zeta_j^n \right|$$

$$\left\| \varepsilon^{n+1} \right\|_{\infty} \leq \left\| \varepsilon^n \right\|_{\infty} + \tau \left\| \zeta^n \right\| \quad \forall n$$

$$\longrightarrow \left\| \varepsilon^{n+1} \right\|_{\infty} \leq \left\| \varepsilon^{n-1} \right\|_{\infty} + \tau \left(\left\| \zeta^n \right\|_{\infty} + \left\| \zeta^{n-1} \right\|_{\infty} \right) \leq \dots \leq \left\| \varepsilon^0 \right\|_{\infty} + \tau \sum_{k=0}^n \left\| \zeta^k \right\|_{\infty}$$

Так как $\varepsilon^0 = 0$ и мы знаем оценку на невязку $\left| \zeta_j^n \right| \leq \frac{\tau}{2} \|u_{tt}\|_{\infty} + \frac{ah}{2} \|u_{xx}\|_{\infty}$,

$$\left\| \varepsilon^n \right\|_{\infty} \leq (n\tau) \left(\frac{\tau}{2} \|u_{tt}\|_{\infty} + \frac{ah}{2} \|u_{xx}\|_{\infty} \right) \leq t_{\max} \left(\frac{\tau}{2} \|u_{tt}\|_{\infty} + \frac{ah}{2} \|u_{xx}\|_{\infty} \right)$$



Численное решение схемы «левый уголок» (5) СХОДИТСЯ к точному решению с первым ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТИ по времени и по пространству

Основная идея:

сведение эволюционного дифференциального уравнения в частных производных к системе ОДУ

Пояснение на примере

начально-краевой задачи для уравнения переноса с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad 0 < x < 1$$

$$u(t, 0) = u_{\text{bound}}(t) \quad 0 < t < t_{\max}$$

В точке $x = x_j$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_j) = 0$$

$$u(t, x_j) = u_j(t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_j) = \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h}$$

➔ **Полудискретная схема**

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{a}{h} (u_j - u_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N_h \quad (\text{система из } N_h \text{ ОДУ})$$

Полудискретная схема = система из N_h линейных ОДУ

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{a}{h} (u_j - u_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N_h \quad ()$$

Иначе, в векторно-матричной форме

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \frac{du_1}{dt} = u'_{bound}(t)$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_{N_h})^T \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a/h & a/h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a/h & a/h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a/h & a/h \end{pmatrix} \quad (7)$$

Для решения системы линейных ОДУ (7) можно использовать разные методы. Например, использование явного метода Рунге-Кутты первого порядка приводит к полностью дискретной схеме «левый уголок»



Содержание

Лекция 6

5. Конечно-разностные схемы высокого порядка. Шаблон аппроксимации
6. Эффект Гиббса. Монотонность линейных схем. Теорема Годунова
7. Нелинейные дифференциальные уравнения на примере невязкого уравнения Бюргерса. Разностный закон сохранения. Разрывные решения невязкого уравнения Бюргерса: бегущий скачок и волна разрежения. Физически верные решения. Консервативность разностной схемы. Численный поток. Энтропийное условие. Теорема Хартена
8. Задача о распаде разрыва, или задача Римана. Идея схемы Годунова. Схема Годунова для линейного уравнения переноса. Схема Годунова для невязкого уравнения Бюргерса Требования к численным методам



Базовые понятия численных методов (1)



Разностная задача, или СХЕМА

ОШИБКА численного решения

НЕВЯЗКА

АППРОКСИМАЦИЯ с порядком k

УСТОЙЧИВОСТЬ и условие УСТОЙЧИВОСТИ

СХОДИМОСТЬ с порядком k

Метод линий



Схема «уголок» для уравнения переноса



УСТОЙЧИВОСТЬ

Начальные данные для схемы (5)

$$u^0 = \{u_j^0, j \in \mathbb{Z}\} \quad \|u^0\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^0| < \infty$$

Перепишем схему (5)

$$u_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) u_j^n + a \frac{\tau}{h} u_{j-1}^n$$

При $a\tau/h \leq 1$

$$|u_j^{n+1}| \leq \max \{|u_j^n|, |u_{j-1}^n|\}$$

Возьмем максимум по $j \in \mathbb{Z}$

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$



Схема «левый уголок» (5) является УСТОЙЧИВОЙ в норме L_∞ с константой $C = 1$ при выполнении УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ $0 \leq a\tau/h \leq 1$



Схема «уголок» для уравнения переноса



КРИТЕРИЙ КУРАНТА – ФРИДРИХСА – ЛЕВИ (Courant – Friedrichs – Lewi / CFL, 1928)
устойчивости численного метода для решения гиперболических уравнений

Для схемы «левый уголок» решения одномерного уравнения переноса

$$a\tau/h \leq 1$$

Для численного метода решения одномерного гиперболического уравнения

$$CFL = |u| \tau / h \leq C$$

CFL - число Куранта / CFL number

Более общий случай

$$CFL = \frac{\max_{i,n} |u_i^n| \max_n \tau^n}{\min_i h_i} \leq C$$

КРИТЕРИЙ CFL

служит для выбора шага по времени



Задача Коши для уравнения переноса с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$
$$u(0, x) = u_0(x)$$

Начальное решение – достаточно гладкое и ограниченное, т.е. $\|u_0\|_{\infty} = \sup |u_0(x)| < \infty$

Точное решение

$$u(t, x) = u_0(x - at)$$



Конечно-разностные схемы высокого порядка



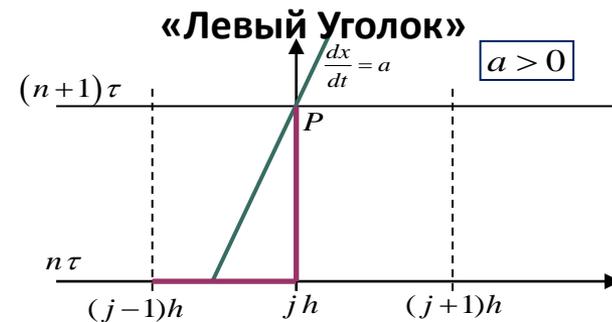
Разностные СХЕМЫ для уравнения переноса с постоянным коэффициентом

Полудискретная схема **первого порядка по пространству**

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{a}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j \in \mathbb{Z}$$
$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$

После дискретизации по времени (применения метода Рунге-Кутты первого порядка (РК1)) получаем схему **первого порядка по времени и пространству**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j \in \mathbb{Z}$$
$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$



ШАБЛОН аппроксимации

Схема «левый уголок»: 3х-точечный шаблон аппроксимации

$$S = \{u_{j-1}^n, u_j^n, u_j^{n+1}\}$$

Разностные СХЕМЫ для уравнения переноса с постоянным коэффициентом

Полудискретная схема **первого порядка по пространству**

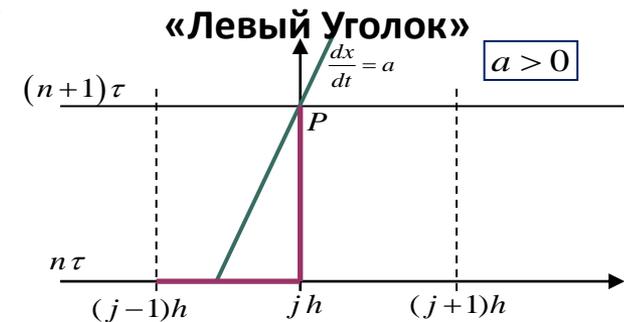
$$\frac{du_j}{dt} + \frac{a}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$

После дискретизации по времени (применения метода Рунге-Кутты первого порядка (РК1)) получаем схему **первого порядка по времени и пространству**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$



Полудискретная схема **третьего порядка по пространству**

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{a}{h} \left(\frac{1}{6}u_{j-2} - u_{j-1} + \frac{1}{2}u_j + \frac{1}{3}u_{j+1} \right) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j \in \mathbb{Z}$$

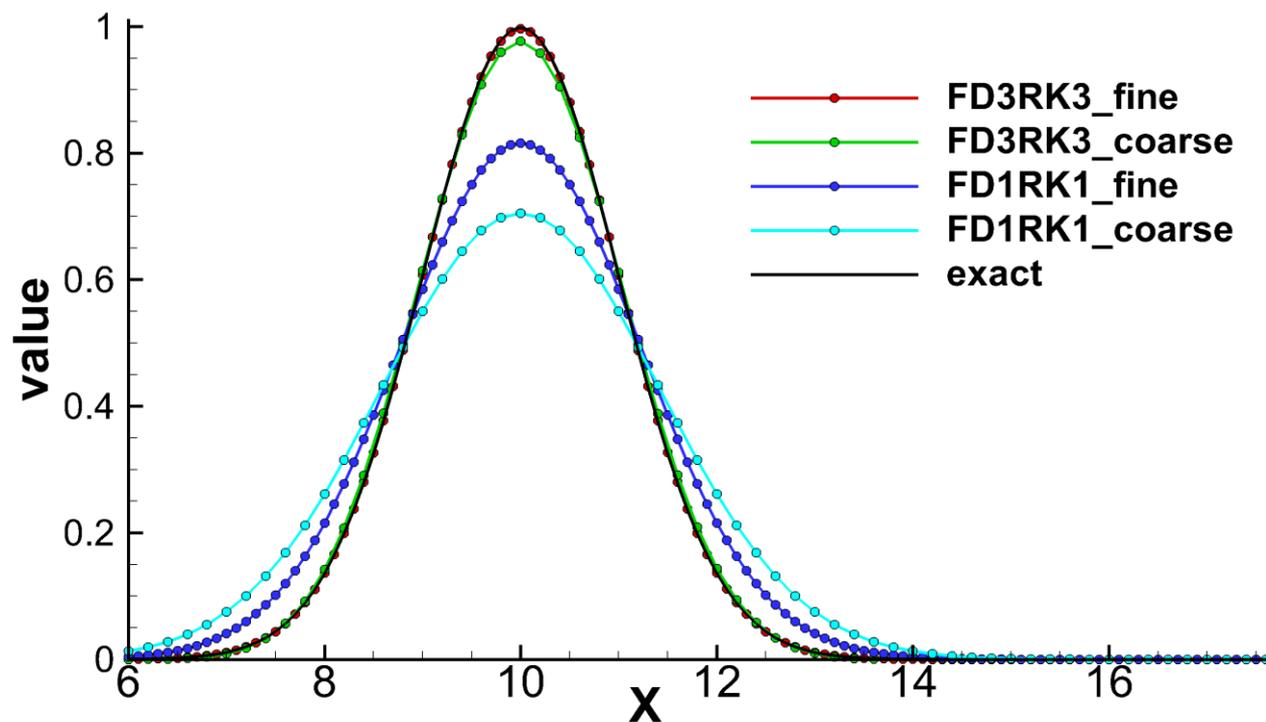
$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j \in \mathbb{Z}$$

После применения метода Рунге-Кутты третьего порядка (РК3) получаем схему **третьего порядка по времени и пространству**

Уравнение переноса с постоянным коэффициентом

Пусть $a = 1 > 0$ $u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ $t_{\max} = 10$

Сетки: грубая (coarse) при $h=1/5$ и подробная (fine) при $h=1/10$



H-refinement and P-refinement

– повышение точности за счет измельчения сетки и за счет повышения порядка точности схемы



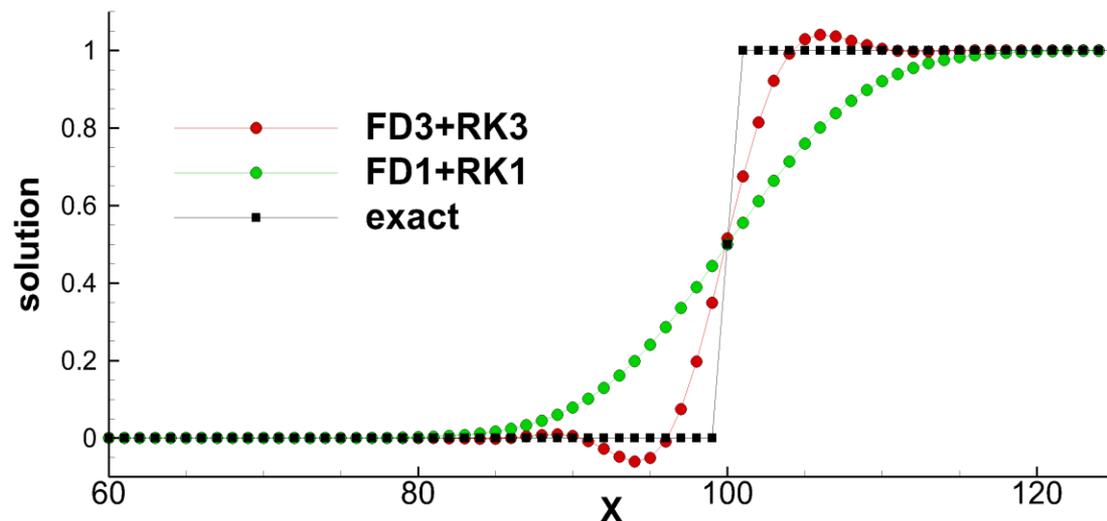
Эффект Гиббса



Уравнение переноса с постоянным коэффициентом

Пусть $a = 1 > 0$ $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $t_{\max} = 100$

Сетка: $h = 1$ $\tau = 0.5$



$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq \|u^n\|_{\infty}$$

условие **МОНОТОННОСТИ** линейных схем

Теорема Годунова

Среди линейных схем для уравнения переноса **не существует МОНОТОННЫХ схем с порядком аппроксимации выше первого** (за исключением случаев $a\tau/h \in N$)

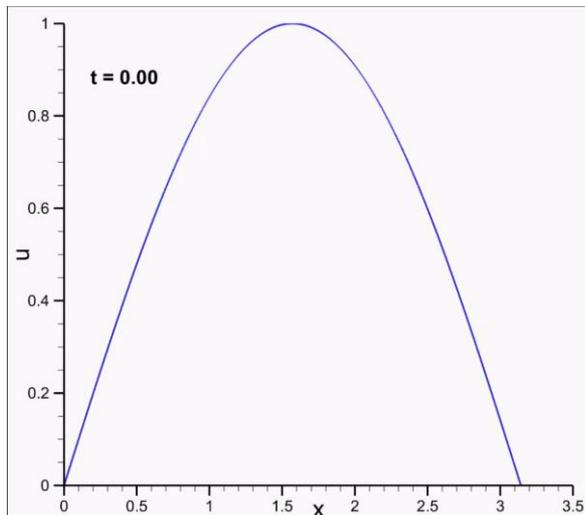
Нелинейное уравнение на примере невязкого уравнения Бюргерса

Задача Коши для невязкого уравнения Бюргерса (уравнения Хопфа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$u(0, x) = u_0(x) \tag{8}$$

Начальное решение – неотрицательное, кусочно-гладкое и ограниченное

Для гладких решений при $t < t_{\text{crit}} = 1/\min u'_0(x)$ $\exists!$ классическое решение
(в классе дифференцируемых функций)



Градиентная катастрофа



Нелинейное уравнение на примере невязкого уравнения Бюргерса

Задача Коши для невязкого уравнения Бюргерса (уравнения Хопфа)

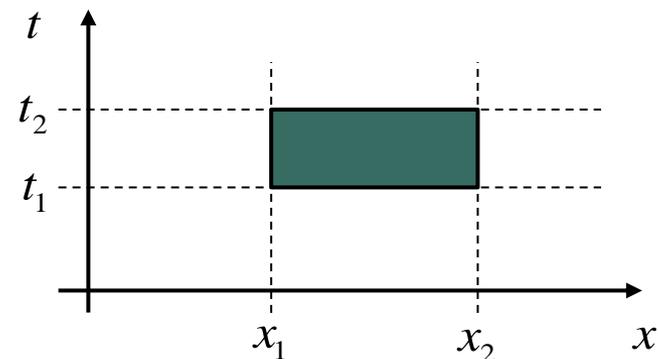
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{8}$$

Для гладких решений $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$

Закон сохранения 1 $\forall 0 < t_1 < t_2 \quad x_1 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(t_2, x) - u(t_1, x)) dx + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{(u(t, x_2))^2}{2} - \frac{(u(t, x_1))^2}{2} \right) dt = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{6} \right) = 0$$

Закон сохранения 2 $\forall 0 < t_1 < t_2 \quad x_1 < x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{u^2(t_2, x)}{2} - \frac{u^2(t_1, x)}{2} \right) dx + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{(u(t, x_2))^3}{6} - \frac{(u(t, x_1))^3}{6} \right) dt = 0$$

Законы сохранения выполняются только **для гладких решений**



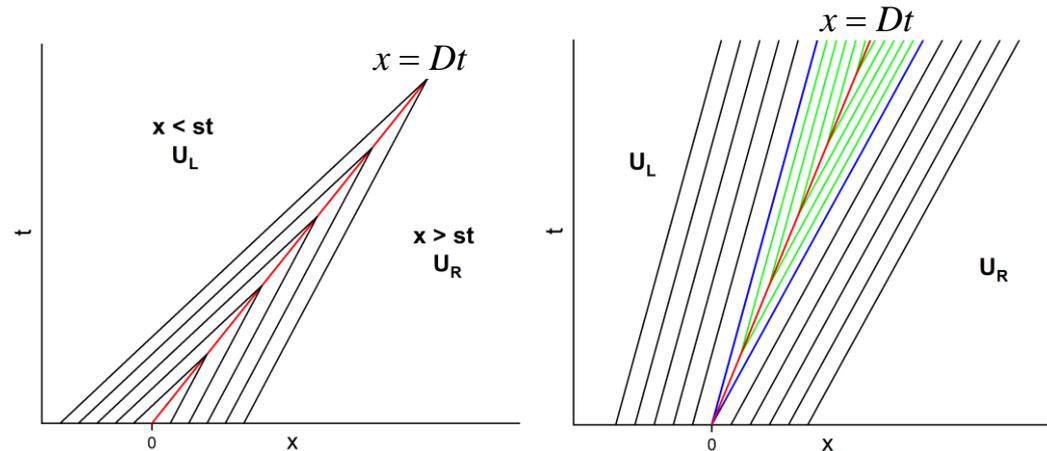
Нелинейное уравнение на примере невязкого уравнения Бюргерса



Разрывные решения невязкого уравнения Бюргерса (уравнения Хопфа)

Решение в виде **бегущего скачка (*)**

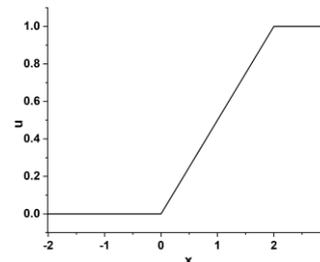
$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & x < Dt, \\ u_R, & x \geq Dt, \end{cases} \quad u_L, u_R > 0$$



Легко проверить, что решение (*) удовлетворяет: закону сохранения 1 при $D = \frac{u_L + u_R}{2}$
закону сохранения 2 при $D = \frac{2u_L^2 + u_L u_R + u_R^2}{3(u_L + u_R)}$

При $u_L < u_R$ помимо решения (*) \exists непрерывное решение в виде **волны разрежения**

$$u(t, x) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t, \\ \frac{x}{t}, & u_L t \leq x < u_R t, \\ u_R, & x \geq u_R t. \end{cases}$$

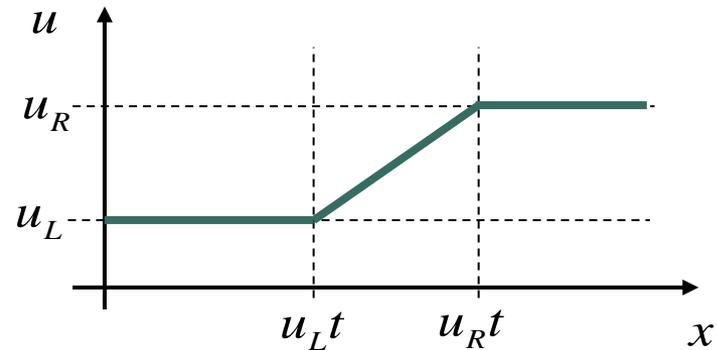
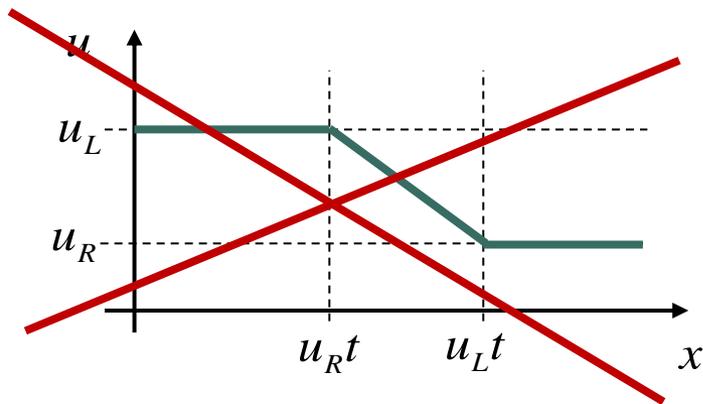
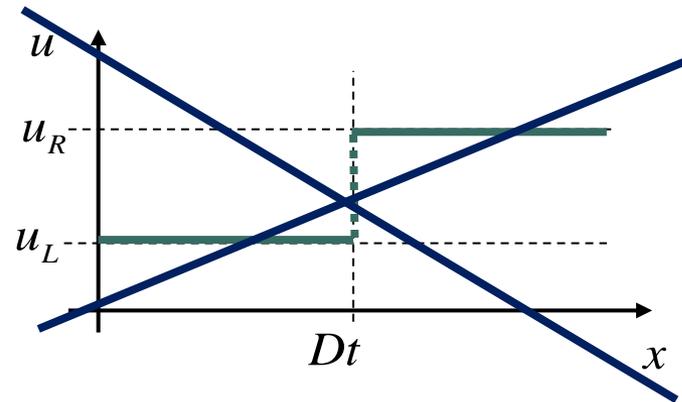
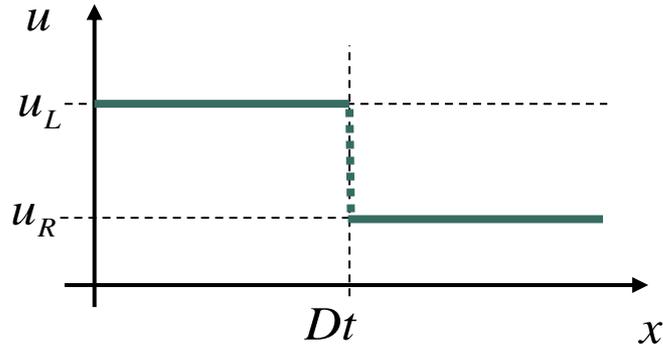


Нелинейное уравнение на примере невязкого уравнения Бюргерса

Разрывные решения невязкого уравнения Бюргерса (уравнения Хопфа)

Какие решения удовлетворяют уравнению Бюргерса?

Какие из них физически корректны?





Нелинейное уравнение на примере невязкого уравнения Бюргерса



О физически верном решении

Такое решение, которое при $\delta \rightarrow 0$ является решением **вязкого уравнения Бюргерса**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Условия физической корректности:

- удовлетворяет Закону сохранения 1 (1)
- содержит скачок лишь при $u_L > u_R$ (2)

Условия физической корректности:

- условие **консервативности** (1)
- выполнение **энтропийного неравенства** (2)

Условие (2) можно заменить **энтропийным неравенством**

$$\int_{x_1}^{x_2} (U(u(t_2, x)) - U(u(t_1, x))) dx + \int_{t_1}^{t_2} (F(u(t_2, x)) - F(u(t_1, x))) dt \leq 0$$

где $U(u)$ - строго выпуклая функция (**ЭНТРОПИЯ**), пример $U(u) = \frac{u^2}{2}$
 $F(u) = \int u U'(u) du$ - **энтропийный поток**



Нелинейное уравнение на примере невязкого уравнения Бюргерса



Разностная схема называется **КОНСЕРВАТИВНОЙ**, если ее можно записать в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n}{h} = 0$$

где $f_{j\pm 1/2}^n$ называются **ЧИСЛЕННЫМИ ПОТОКАМИ**

Консервативная схема **согласована с законом сохранения**

Схема **согласована с энтропийным неравенством**, если для нее выполняется

$$\frac{U(u_j^{n+1}) - U(u_j^n)}{\tau} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{h} \leq 0$$

Для невязкого уравнения Бюргерса (уравнения Хопфа) схема «левый уголок» является **консервативной** и **согласованной с энтропийным неравенством**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left(\frac{(u^2)_j^n}{2} - \frac{(u^2)_{j-1}^n}{2} \right) = 0 \quad f_{j+1/2} = \frac{u_j^2}{2}$$

Теорема Хартена

Если **МОНОТОННАЯ** схема **КОНСЕРВАТИВНА** и **согласована с энтропийным неравенством**, то она обеспечивает **СХОДИМОСТЬ** численного решения к **правильному обобщенному решению** дифференциального уравнения



Схема Годунова



Задача о распаде произвольного разрыва / Задача Римана (Riemann problem)

Невязкое уравнение Бюргерса (уравнение Хопфа) с разрывными начальными данными

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad f(u) = \frac{u^2}{2} \quad u(0, x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x \geq 0, \end{cases}$$

Точное решение задачи о распаде разрыва

$$u_{exact}(t, x) = \begin{cases} \text{бегущий скачок} & u_L \geq u_R \\ \text{волна разрежения} & u_L \leq u_R \end{cases}$$

Бегущий скачок / shock

Скачок, бегущий со скоростью $D = (u_L + u_R)/2$

$$u_{exact}(t, x) = \begin{cases} u_L, & x < Dt, \\ u_R, & x \geq Dt, \end{cases} \quad u_L, u_R > 0$$

Волна разрежения

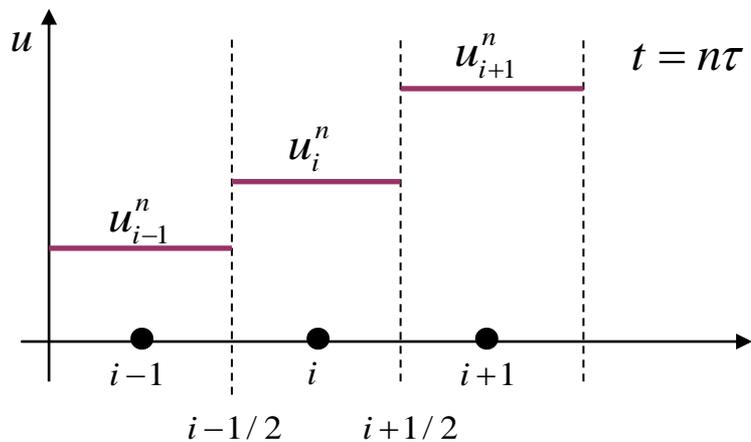
$$u_{exact}(t, x) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t, \\ \frac{x}{t} & u_L t \leq x < u_R t, \\ u_R, & x \geq u_R t. \end{cases}$$

КОНСЕРВАТИВНАЯ схема «левый уголок»

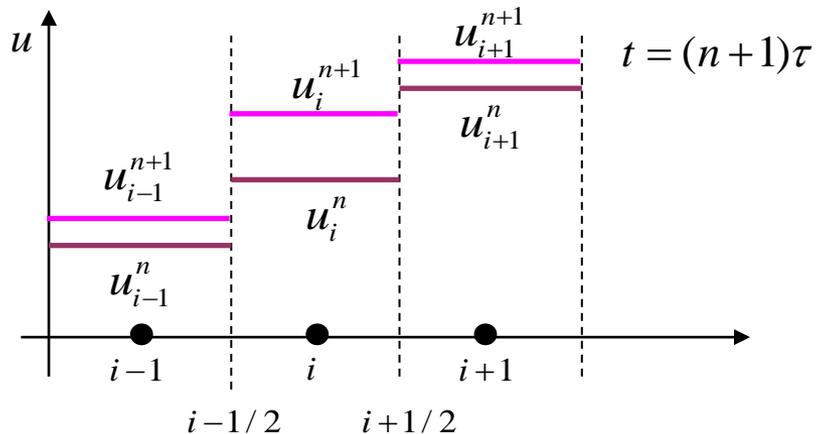
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n}{h} = 0 \quad f_{j+1/2}^n = f(u_{exact}(x/t|_{x=0}; u_j^n, u_{j+1}^n) = \max \left\{ \frac{(u_L^-)^2}{2}, \frac{(u_R^+)^2}{2} \right\}$$

$$u^- = \min(u, 0) \quad u^+ = \max(u, 0)$$

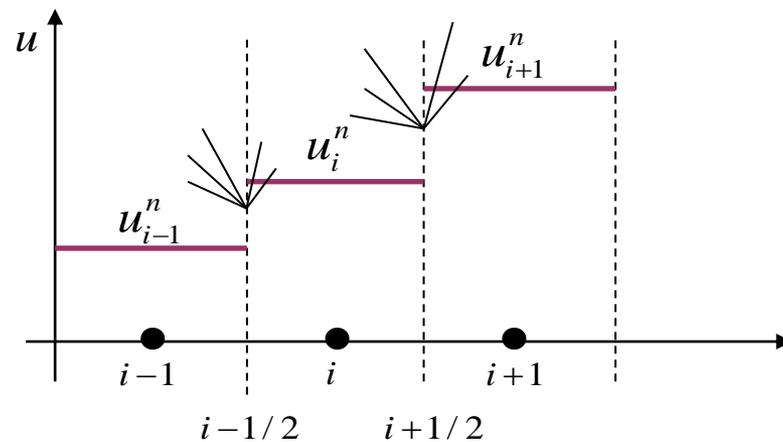
Иллюстрация к подходу Годунова



Шаг 1: кусочно-линейное представление

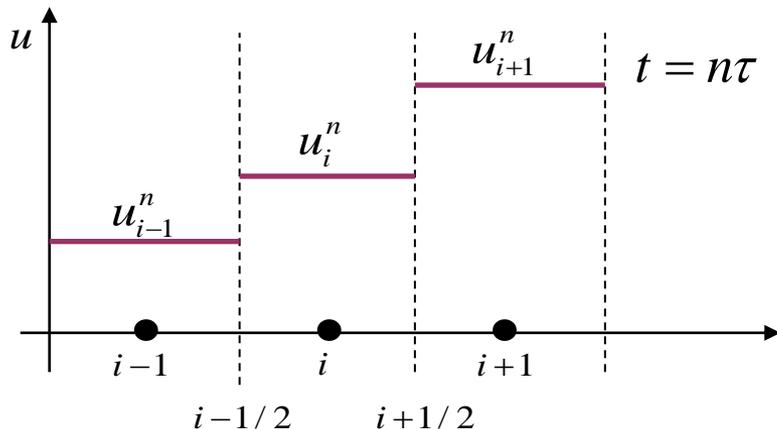


Шаг 3: осреднение решения на каждой ячейке

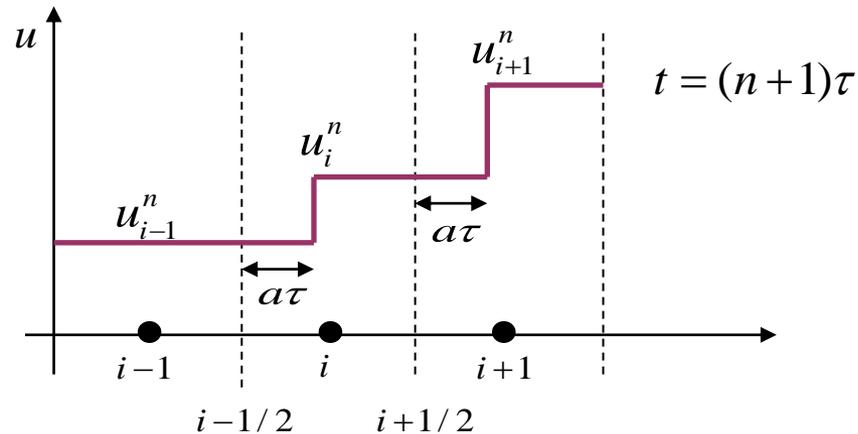


Шаг 2: точное решение задачи о распаде разрыва (задачи Римана) на каждом интерфейсе

Иллюстрация к подходу Годунова для уравнения переноса при $a > 0$



Шаг 1: кусочно-линейное представление



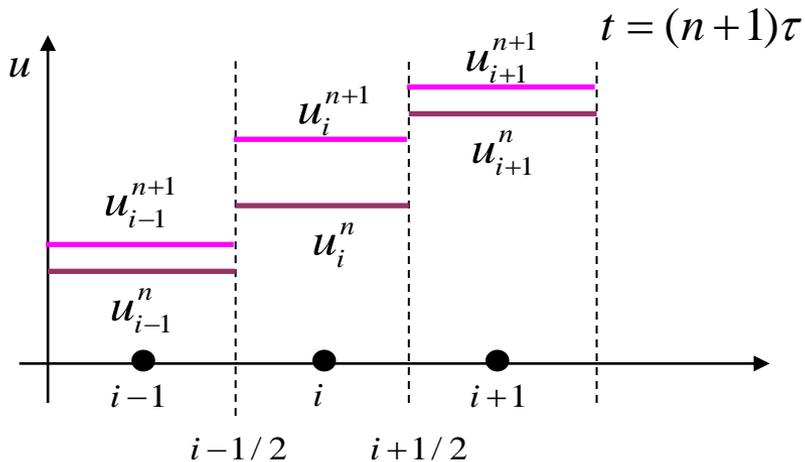
Шаг 2: точное решение
– перенос разрывов вправо

Точное решение

$$u^{n+1}(x, t) = u^n(x - a(t - n\tau)) = u^n(x - a\tau)$$

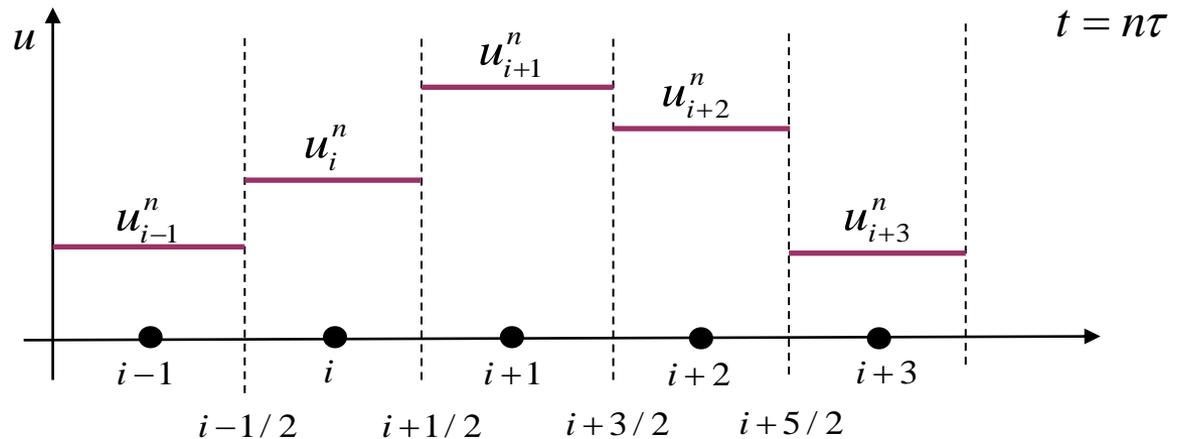
Осреднение

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{i-1/2}^{i+1/2} u^n(x - a\tau) dx \\ &= \frac{1}{h} \left[a\tau u_{i-1}^n + (x - a\tau) u_i^n \right] = u_i^n - \frac{a\tau}{h} (u_i^n - u_{i-1}^n) \end{aligned}$$



Шаг 3: осреднение решения на каждой ячейке

Иллюстрация к подходу Годунова для уравнения Хопфа



Шаг 2: точное решение задачи о распаде разрыва (задачи Римана) на каждом интерфейсе

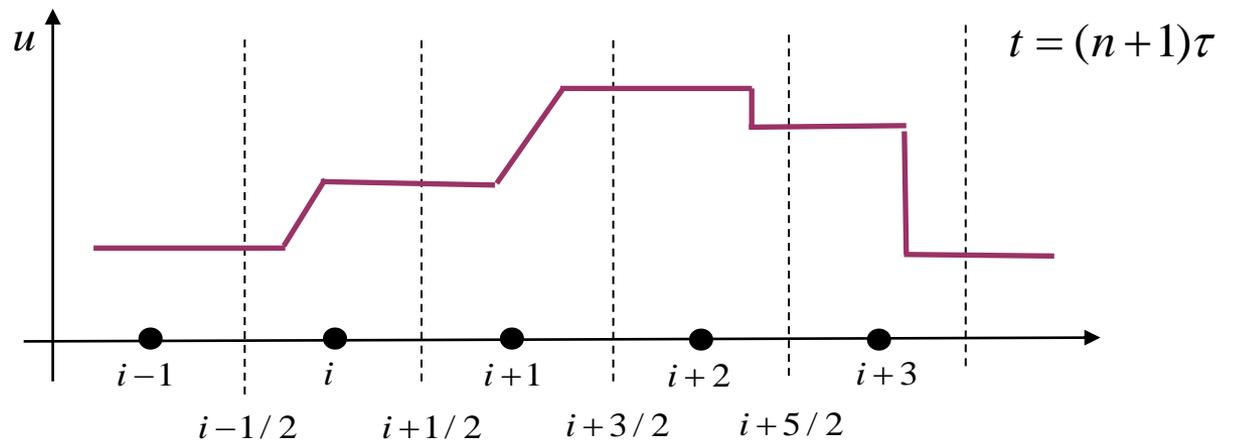




Схема Годунова



**Можно показать, что метод Годунова для невязкого уравнения Бюргерса
Удовлетворяет энтропийному условию**



Требования к численным методам



Свойства «идеального» численного метода для гиперболических уравнений

- **аппроксимация на гладких решениях** (с максимально высоким порядком k !)
- **устойчивость**
(при мягком условии Куранта, позволяющим выбирать большие шаги по времени)
- **монотонность**
- **консервативность**, или согласованность с законом сохранения
- **согласованность с энтропийным условием**



Базовые понятия численных методов (1+2)



Разностная задача, или СХЕМА

МОНОТОННАЯ схема

ОШИБКА численного решения

ЧИСЛЕННЫЙ ПОТОК

НЕВЯЗКА

КОНСЕРВАТИВНАЯ схема

АППРОКСИМАЦИЯ с порядком k

ЭНТРОПИЙНОЕ УСЛОВИЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ

Задача о распаде разрыва / Задача Римана

СХОДИМОСТЬ с порядком k

Бегущий скачок

Метод линий

Волна разрежения

ШАБЛОН аппроксимации

Метод Годунова

Теоремы

Теорема Лакса-Рябенского

Теорема Годунова

Теорема Хартена



Содержание

Лекция 7

10. О методе конечных объёмов
11. Понятие о квазиодномерных методах на примере EBR схемы (*)



О методе конечных объёмов



Консервативная формулировка систему уравнений Эйлера

$$\mathbf{U} = (\rho, u, v, w, p)^T \text{ - примитивные, или физические, переменные} \quad \mathbf{u} = (u, v, w)^T$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}) = (\rho, m, n, l, E)^T \quad m = \rho u \quad n = \rho v \quad l = \rho w \quad E = \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \rho \varepsilon$$

- консервативные переменные

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{Q})}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma-1) \left(E - \frac{m^2 + n^2 + l^2}{2\rho} \right) \\ mn / \rho \\ ml / \rho \\ \frac{m}{\rho} \left(\gamma E - (\gamma-1) \frac{m^2 + n^2 + l^2}{2\rho} \right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ v(E+p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ v(E+p) \end{bmatrix}$$



О методе конечных объёмов



Консервативная формулировка систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0$$

Введём $\mathcal{F} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = 0$$



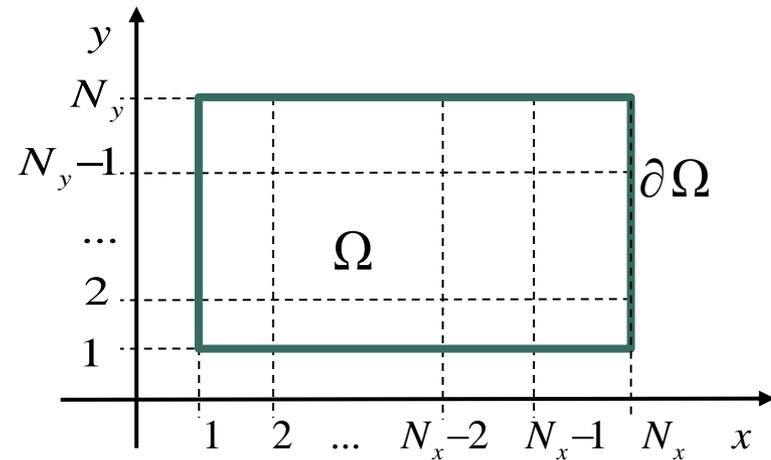
О методе конечных объёмов



Структурированная сетка

Ω - вычислительная (расчетная) область

$\partial\Omega$ - граница расчетной области



Если $\forall i \ h_i = h_x, \forall j \ h_j = h_y, \forall k \ h_k = h_z$

$\left\{ \mathbf{r}_i = (x_i, y_j, z_k), \ x_i = ih_x, \ i = \overline{1, N_x}, \ y_j = jh_y, \ j = \overline{1, N_y}, \ z_k = kh_z, \ k = \overline{1, N_z}, \right\}$

$N = N_x \cdot N_y \cdot N_z \quad V_{ijk} = h_i \cdot h_j \cdot h_k$

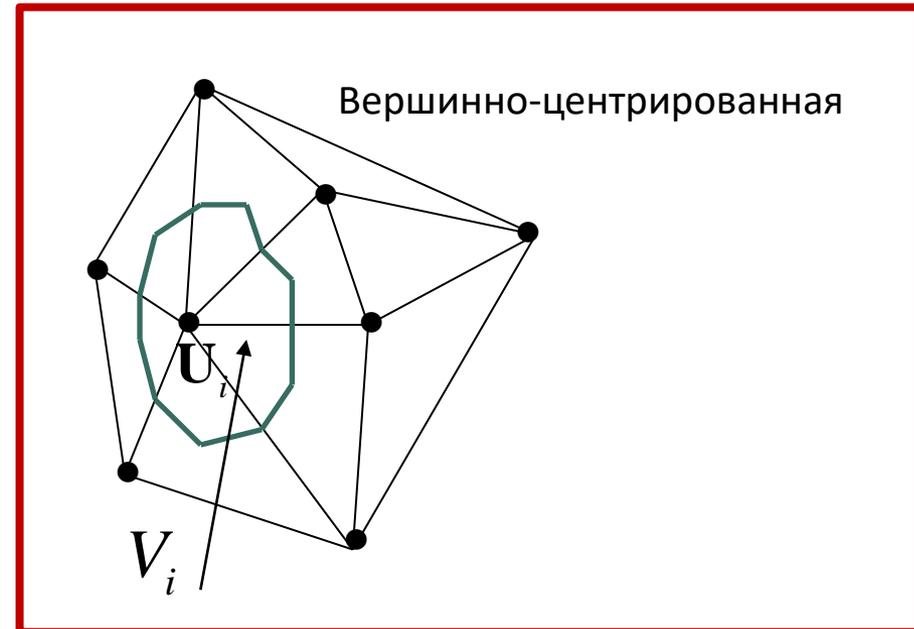
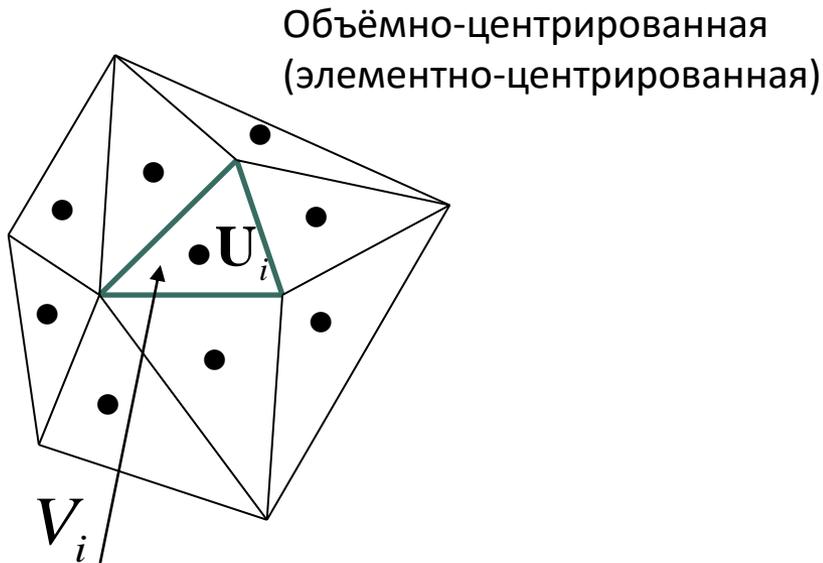
Равномерная

Неравномерная

Декартовая Криволинейная

Многоблочная

Неструктурированная сетка



$$\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i), V_i, i = 1, \dots, N\}$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^N V_i$$

Элементы гибридной (смешанной) сетки: треугольники, четырехугольники (2D), тетраэдры, пирамиды, треугольные призмы, гексаэдры (3D)

Общая формулировка метода конечных объёмов (на примере вершинно-центрированной схемы)

Уравнения Эйлера в векторно-матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = 0$$

Метод линий

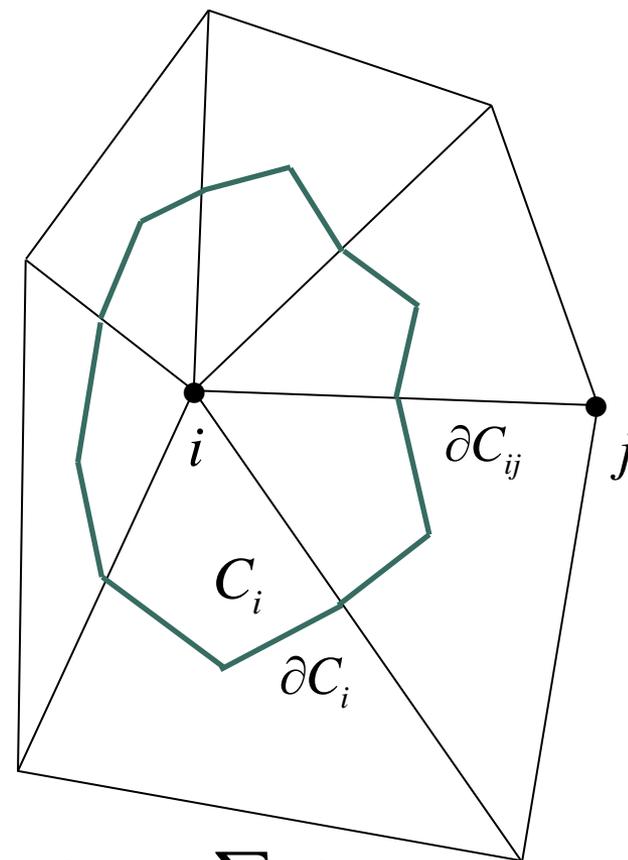
$$\frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} + [\nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q})]_i = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$$\star \frac{d\bar{\mathbf{Q}}_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \int_{V_i} [\nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q})]_i dv \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{n} ds \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad i = \overline{1, N}$$

$$\int_{\partial C_i} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial C_{ij}} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds$$

$N_1(i)$ - множество узлов – соседей первого уровня



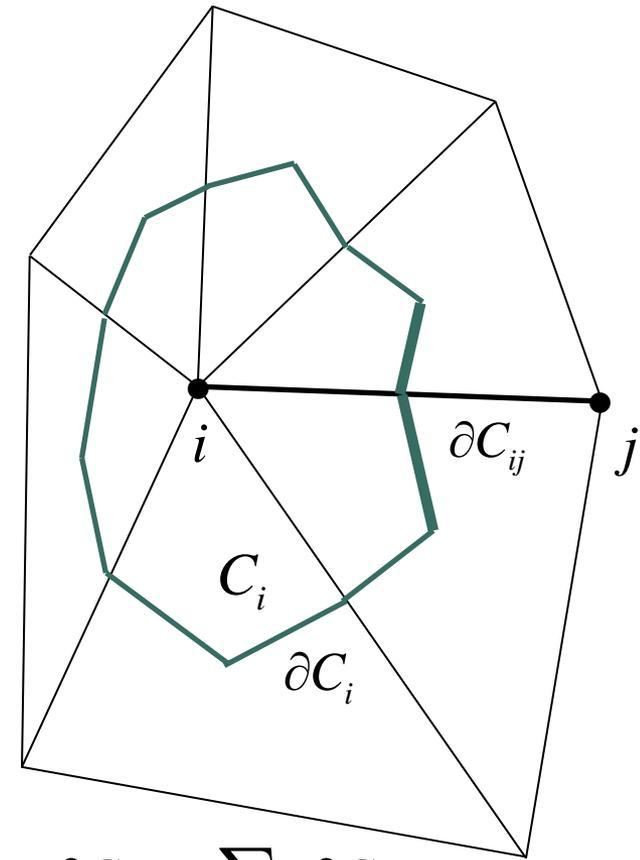
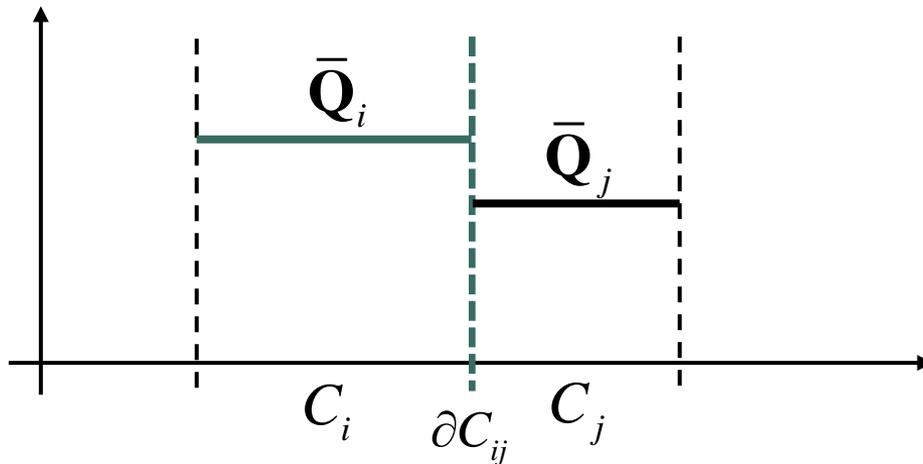
$$\partial C_i = \sum_{j \in N_1(i)} \partial C_{ij}$$

Общая формулировка метода конечных объёмов (на примере вершинно-центрированной схемы)

$$\frac{d\bar{Q}_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial C_{ij}} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds \quad i = 1, \dots, N$$

2 проблемы:

- точность интегрирования по сегменту границы ∂C_{ij}
- точность определения численного потока на границе между контрольными объёмами (ячейками)



$$\partial C_i = \sum_{j \in N_1(i)} \partial C_{ij}$$

Как это делаем мы

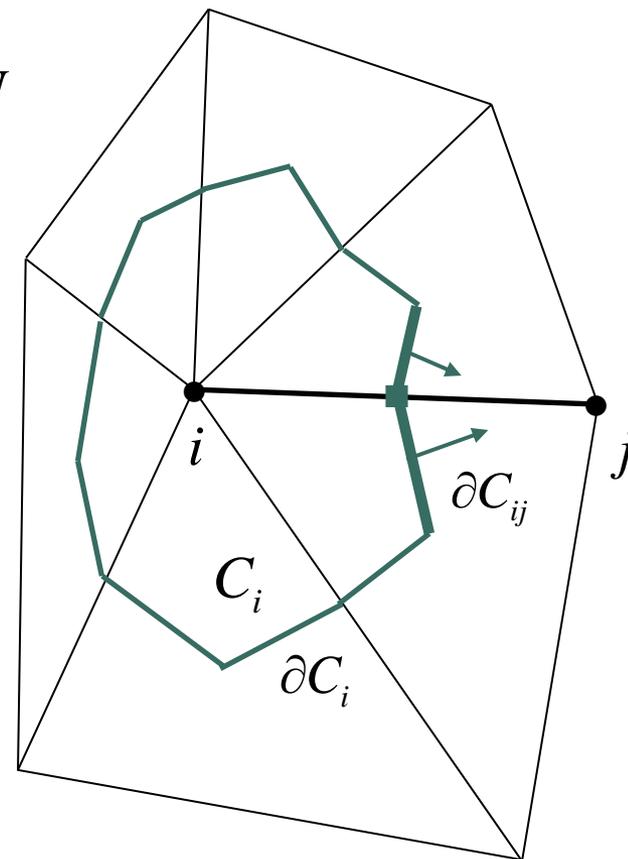
$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial C_{ij}} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial C_{ij}} (\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij} |\mathbf{n}_{ij}|$$

$$\mathbf{h}_{ij} = \mathcal{F}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij} \quad \hat{\mathbf{n}}_{ij} = \frac{\mathbf{n}_{ij}}{|\mathbf{n}_{ij}|} \quad |\hat{\mathbf{n}}_{ij}| = 1$$

$$\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{n}_{ij}^{(1)} + \mathbf{n}_{ij}^{(2)} \quad |\mathbf{n}_{ij}^{(1)}| = l_{ij}^{(1)} \quad |\mathbf{n}_{ij}^{(2)}| = l_{ij}^{(2)}$$

$$h_{ij} = ?$$



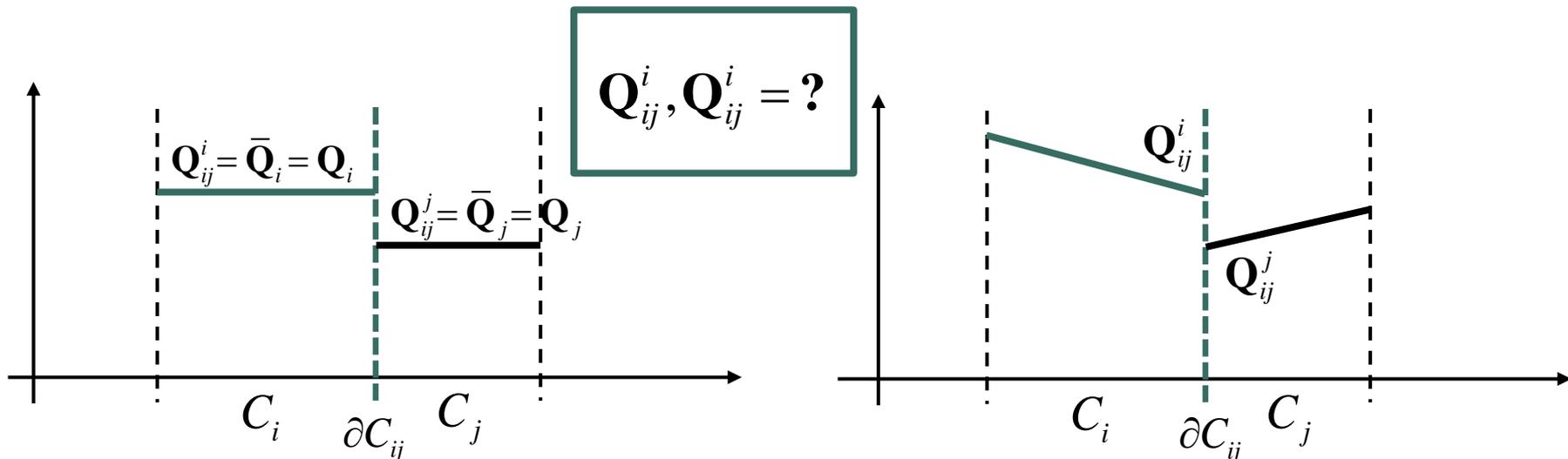
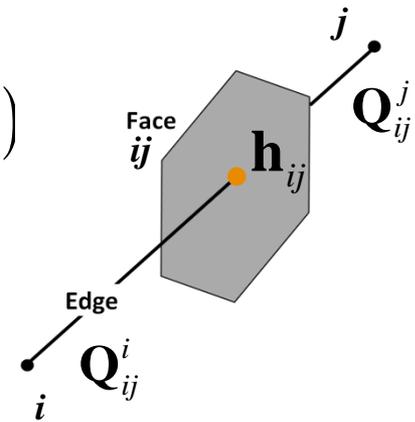
Примеры приближенного метода Годунова

Метод Роу
$$\mathbf{h}_{ij} = \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_{ij}^{R/j}) \hat{\mathbf{n}}_{ij} + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{ij}^{L/i}) \hat{\mathbf{n}}_{ij}}{2} - \frac{1}{2} |(\mathbf{A}_n)_{ij}| (\mathbf{Q}_{ij}^{R/j} - \mathbf{Q}_{ij}^{L/i})$$

$$(\mathbf{A}_n)_{ij} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \hat{n}_x + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \hat{n}_y + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Q}} \hat{n}_z$$

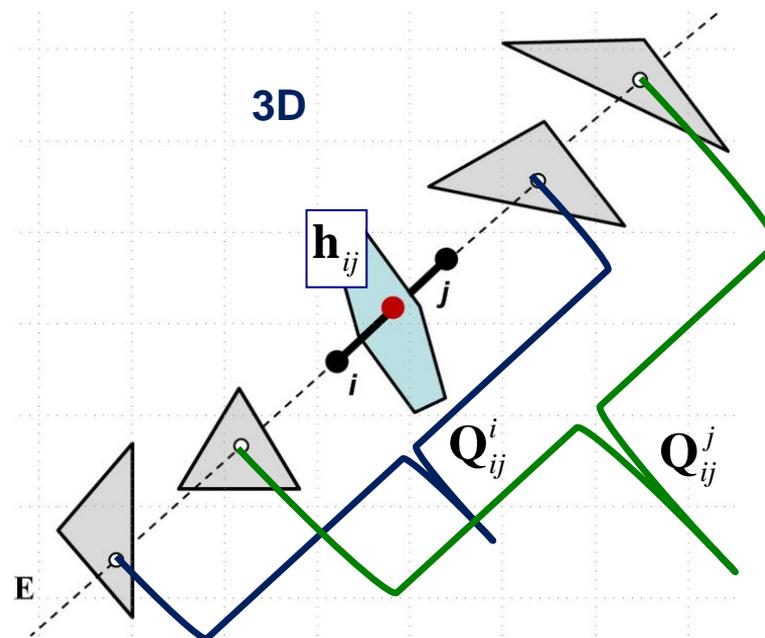
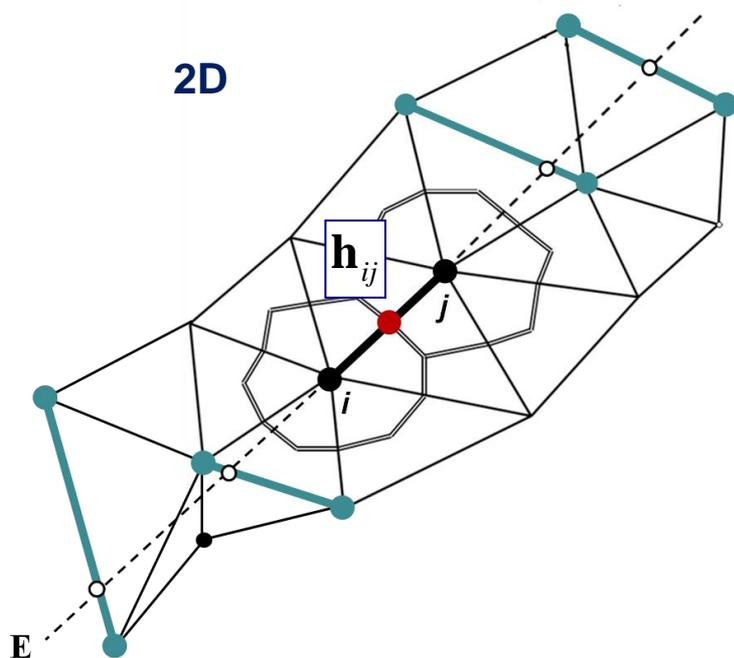
$$\hat{\mathbf{n}}_{ij} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z) \quad |(\mathbf{A}_n)_{ij}| = \mathbf{S}_{ij} |(\mathbf{A}_n)_{ij}| \mathbf{S}_{ij}^{-1},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{ij} = \text{diag}((u_n)_{ij}, (u_n)_{ij}, (u_n)_{ij}, (u_n)_{ij} + c_{ij}, (u_n)_{ij} - c_{ij}), \quad (u_n)_{ij} = (\mathbf{u}_n)_{ij} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij}$$

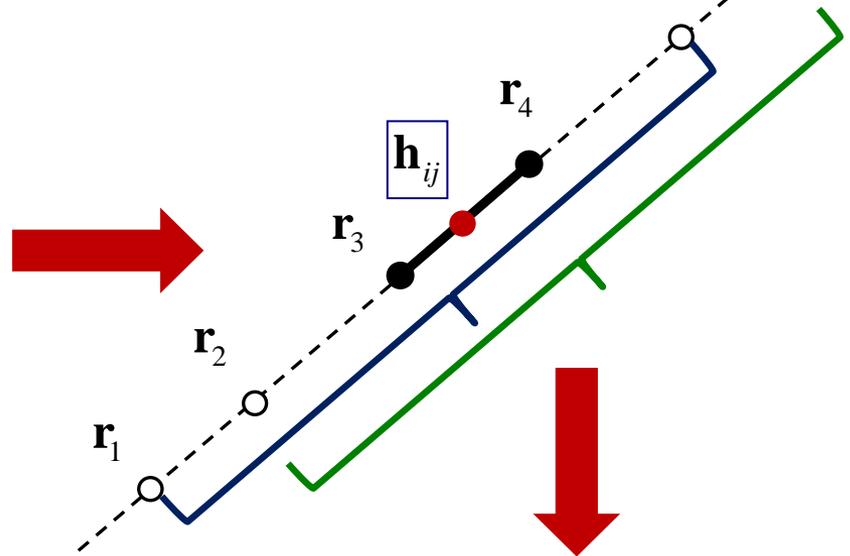
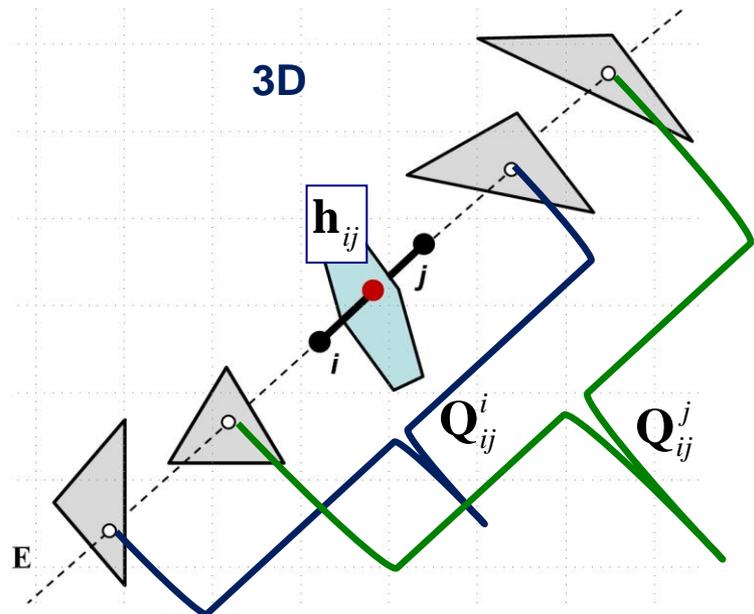


Идея схем, основанных на квазиодномерной реберно-ориентированной реконструкции

EBR (Edge-Based Reconstruction) схема



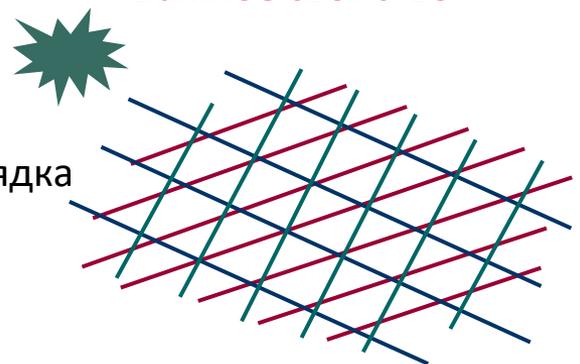
EBR (Edge-Based Reconstruction) схема



Одномерные реконструкции

Q_{ij}^i, Q_{ij}^j - предраспадные значения
 h_{ij} - численный поток на грани ячейки

Важное свойство



Естественная трансформация в схему высокого порядка (5-6) на трансляционно-инвариантных сетках вида: (все узлы лежат равномерно на сеточных линиях)

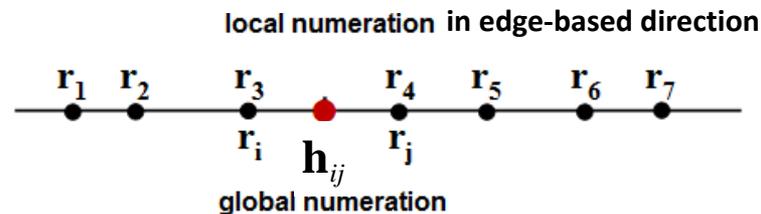


EBR (Edge-Based Reconstruction) схема

Общий вид
$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_i = -[\nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q})]_i^{EBR} = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij} |\mathbf{n}_{ij}| \quad \mathbf{h}_{ij} = h(\Psi_{ij}^L, \Psi_{ij}^R)$$

Оператор \mathbf{R} квазиодномерной реконструкции $\Psi_{ij}^{R/L} = \mathbf{R}_{ij}^{R/L}(\{\Psi\})$

Разделённые разности
$$\Delta \Psi_{i+1/2} = (\Psi_{i+1} - \Psi_i) / \Delta r_{i+1/2}$$



Квазиодномерная реконструкция схемы EBR3

$$\mathbf{R}_{ij}^L(\{\Psi\}) = \Psi_i + \frac{\Delta r_{7/2}}{2} \left(\frac{1}{3} \Delta \Psi_{5/2} + \frac{2}{3} \Delta \Psi_{7/2} \right) \quad \mathbf{R}_{ij}^R(\{\Psi\}) = \Psi_j + \frac{\Delta r_{7/2}}{2} \left(\frac{1}{3} \Delta \Psi_{9/2} + \frac{2}{3} \Delta \Psi_{7/2} \right)$$

Квазиодномерная реконструкция схемы EBR5

$$\mathbf{R}_{ij}^L(\{\Psi\}) = \Psi_i + \frac{\Delta r_{7/2}}{2} \left(-\frac{1}{15} \Delta \Psi_{3/2} + \frac{11}{30} \Delta \Psi_{5/2} + \frac{4}{5} \Delta \Psi_{7/2} - \frac{1}{10} \Delta \Psi_{9/2} \right)$$

$$\mathbf{R}_{ij}^R(\{\Psi\}) = \Psi_j - \frac{\Delta r_{7/2}}{2} \left(-\frac{1}{15} \Delta \Psi_{11/2} + \frac{11}{30} \Delta \Psi_{9/2} + \frac{4}{5} \Delta \Psi_{7/2} - \frac{1}{10} \Delta \Psi_{5/2} \right)$$